

Genèse et diffusion d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore sur les fractions continues algébriques.

Hervé Le Ferrand

▶ **To cite this version:**

Hervé Le Ferrand. Genèse et diffusion d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore sur les fractions continues algébriques.. 2014. hal-00521135v3

HAL Id: hal-00521135
https://hal.science/hal-00521135v3

Preprint submitted on 28 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Genèse et diffusion d'un théorème de Robert de Montessus de Ballore sur les fractions continues algébriques.

Hervé Le Ferrand *

6 août 2014



FIGURE 1 – Robert de Montessus de Ballore en 1914

*Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, 9 avenue Alain Savary, BP 47870, 21078 Dijon, France, courriel : leferran@u-bourgogne.fr

Résumé : En 1902, Robert de Montessus de Ballore démontre la convergence d'une fraction continue algébrique associée à une fonction analytique à l'origine et méromorphe dans un domaine contenant l'origine. Aujourd'hui ce théorème est encore cité. Et le nom *Montessus de Ballore* sert à nommer des généralisations du résultat. Nous déterminerons le contexte et les différentes étapes qui ont conduit Robert de Montessus à l'élaboration de son résultat. Cette étude s'appuie notamment sur la correspondance scientifique de Robert de Montessus.

Introduction

Nous étudions la genèse et la diffusion d'un théorème de convergence dans le domaine des *fractions continues algébriques*. Ce théorème est démontré en 1902 par le mathématicien français Robert de Montessus de Ballore (1870-1937). C'est un résultat de prolongement analytique : l'approche est originale. Robert de Montessus considère une fraction continue algébrique construite à partir du développement en série de la fonction en 0 qui va prolonger la série en dehors du disque de convergence. Quels éléments participent à l'émergence puis à la réception d'un nouveau résultat ? Voici la question centrale de notre étude. Il s'agit de préciser le contexte mathématique dans lequel s'inscrivent les recherches du mathématicien, de montrer le lien avec ses autres travaux et de mettre en évidence le cheminement du raisonnement qui l'a conduit au résultat.

Pourquoi nous intéresser à un théorème à priori très spécifique au domaine des fractions continues, qui plus est, démontré par un mathématicien peu connu ? En premier lieu, on peut se rendre compte facilement que ce théorème a assuré à son auteur une postérité. Une simple recherche sur Internet permet de le voir : le théorème de Robert de Montessus est toujours cité et de nombreuses généralisations du résultat portent le nom Montessus de Ballore [1]. Si tout cela est essentiellement circonscrit au domaine des fractions continues et à celui de l'approximation par des fractions rationnelles, à une ou plusieurs variables, on peut aussi rencontrer le résultat de Robert de Montessus dans d'autres champs, comme en Physique mathématique [2]. D'autre part, Robert de Montessus n'est pas l'auteur d'un seul résultat et ne s'est pas cantonné aux seules fractions continues. On lui doit, par exemple, un ouvrage sur les probabilités [35] publié en 1908, dont l'originalité tient au chapitre consacré à la théorie de la spéculation de Louis Bachelier, que ce dernier a développée dans sa thèse soutenue en 1900 [5]. A la fin de la première guerre mondiale, Robert de Montessus entreprend un vaste projet éditorial, à savoir la publication d'un annuaire des laboratoires et des établissements d'enseignement supérieur du monde entier : l'Index Generalis. Parallèlement, il fait partie du comité de rédaction du Journal de Mathématiques Pures et Appliquées [3]. On voit donc que Robert de Montessus de Ballore a été très actif dans la communauté mathématiques pendant la période années 1900-1937.

En cette année 1902, Robert de Montessus [26], alors âgé de trente-deux ans, vient de débuter une thèse à la faculté des Sciences de Paris sous la direction Paul Appell [4]. Son théorème est publié dans le Bulletin de la Société Mathématique de France [5]. Robert de Montessus pose deux questions :

1. Donnons quelques exemples d'articles dans lesquels le résultat de Montessus apparaît : en 1997, Annie Cuyt et Doron Lubinsky publient *A de Montessus theorem for multivariate homogeneous Padé approximants.* [11] ; en 2011, paraît *From QD to LR and QR, or, how were the QD and LR algorithms discovered ?* [15], de M. H. Gutknecht M.H. et B.N. Parlett ; en 2013, dans SIAM Review, paraît l'article *Robust Padé Approximation via SVD* de Pedro Gonnet, Stefan Güttel, Lloyd N. Trefethen.

2. En 2006, dans Computational Mathematics and Mathematical Physics, S. L. Skorokhodov et D. V. Khristoforov publient *Calculation of the Branch Points of the Eigenfunctions Corresponding to Wave Spheroidal Functions.*

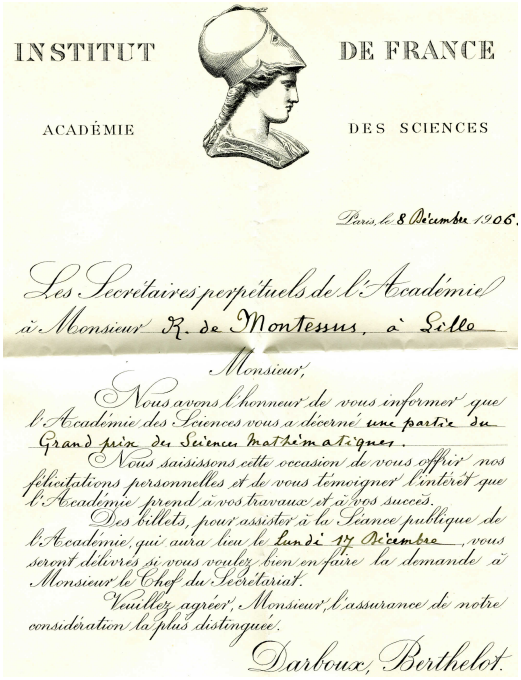
3. Il entre au comité de rédaction en 1917.

4. Paul Appell devient doyen de la faculté des Sciences de Paris en 1903.

5. Tome 30 (1902), pages 28 à 36

Une suite de réduites consécutives d'un tableau de fractions normales définit-elle une fonction identique à la fonction définie par la série qui a donné naissance au tableau et, dans l'affirmative, la fraction continue correspondant à la suite prolonge-t-elle la série en dehors de son cercle de convergence ?

Robert de Montessus considère le cas particulier d'une fonction méromorphe, analytique à l'origine, et choisit comme suite de réduites, les éléments d'une ligne de la table de Padé [6] associée à la fonction. Trois ans plus tard, le 8 Mai 1905, Robert de Montessus soutient sa thèse devant un jury composé de Paul Appell (président) (1855-1930), Henri Poincaré (1854-1912) et Edouard Goursat (1856-1936). Ses recherches sur les Fractions Continues Algébriques sont récompensées en 1906 par un Grand Prix de l'Académie des Sciences Mathématiques, partagé avec Henri Padé (1863-1955) et André Auric (1866-1943) [7].



INSTITUT DE FRANCE

ACADÉMIE DES SCIENCES

Paris, le 8 Décembre 1906.

Les Secrétaires perpétuels de l'Académie
à Monsieur R. de Montessus, à Lille

Monsieur,

Nous avons l'honneur de vous informer que l'Académie des Sciences vous a décerné une partie du Grand prix des Sciences mathématiques.

Nous saisissons cette occasion de vous offrir nos félicitations personnelles et de vous témoigner l'intérêt que l'Académie prend à vos travaux et à vos succès.

Des billets, pour assister à la Séance publique de l'Académie, qui aura lieu le lundi 17 Décembre, vous seront délivrés si vous voulez bien en faire la demande à Monsieur le Chef du Secrétariat.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de notre considération la plus distinguée.

Darboux, Berthelot.

FIGURE 2 – *Grand prix de l'Académie des Sciences*

Après avoir donné quelques définitions et résultats sur les fractions continues et les approximants de Padé [8], nous étudierons le contexte dans lequel s'inscrit le théorème de 1902. En particulier nous répondrons à la question : qui travaillait sur la convergence des fractions continues algébriques et quels étaient en fait les objectifs de toutes ces recherches de l'époque ? En 2010, nous avons retrouvé, grâce à des descendants de Robert de Montessus, une partie de sa correspondance scientifique et de nombreux documents de travail [9]. Robert de Montessus a correspondu notamment avec des mathématiciens travaillant les fractions continues algébriques ou sur des thèmes proches. Ces lettres permettent de

6. Nous donnons une définition de cette table plus loin.
7. André Auric était ingénieur en chef des Ponts et Chaussées et a soutenu une thèse en Mathématiques en 1893.
8. En 1902, on ne parlait pas encore d'approximants de Padé mais de *fractions approchées*.
9. Ces lettres et documents ayant appartenu à Robert de Montessus font l'objet d'un archivage à la bibliothèque de Mathématiques-Informatique-Recherche de l'Université Pierre et Marie Curie.

comprendre le processus de construction du théorème et de sa diffusion. Des ressources électroniques nous ont aussi permis d'étudier la circulation [10] du théorème de 1902.

Fractions continues algébriques et approximants de Padé

Rappelons qu'une fraction continue est la donnée de deux suites d'entiers naturels, $q_0, q_1, q_2, \ldots$, $p_1, p_2, \ldots$ et d'un procédé de calcul :

$$q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cdots}}}$$

Le cas le plus élémentaire d'obtention d'une telle écriture est l'utilisation de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple numérateur-dénominateur d'une fraction. On obtient ainsi par exemple :

$$\frac{105}{24} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Un procédé similaire, faisant intervenir la partie entière, donne pour le nombre $\sqrt{3}$ [11] :

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

La réduite, ou le convergent, d'ordre k de la fraction continue, est la fraction :

$$\frac{A_k}{B_k} = q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cdots + \frac{p_k}{q_k}}}.$$

Les réduites vont fournir dans certains cas des approximations intéressantes de la valeur de la fraction continue [12].

Les relations de récurrence suivantes lient les numérateurs et les dénominateurs des réduites :

$$A_k = q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2} \ ; \ B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2}.$$

avec pour premiers termes :

$$A_{-1} = 1, \ A_0 = q_0, \ A_1 = q_1 q_0 + p_1$$

et

$$B_{-1}, \ B_0 = 1, \ B_1 = q_1.$$

Les deux relations de récurrence ci-dessus montrent un lien immédiat entre les fractions continues et les *équations aux différences finies linéaires* [13]. On retrouve ce lien notamment dans le mémoire de Niels Nörlund (1885-1981), *Fractions continues et différences réciproques*, paru en 1911 dans Acta

10. Nous emploierons indistinctement les termes *diffusion* et *circulation*. Les anglo-saxons utilisent *dissemination*.

11. Lagrange a démontré dans *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques* publié en 1770, que tout nombre *quadratique*, $\sqrt{3}$ en est un, peut être écrit sous la forme d'une fraction continue périodique.

12. L'astronome hollandais Christian Huygens (1629-1695) utilise dans son ouvrage *Descriptio automati planetarii* [20], des fractions continues et leurs réduites pour la construction d'automates planétaires. Pour fixer le nombre de dents des roues crantées de ses machines, Huygens est confronté à des rapports de grands nombres, à savoir de distances astronomiques. En prenant des réduites des développements en fractions continues de ces rapports, il approxime de manière satisfaisante ces quantités par des quotients d'entiers assez petits.

13. Dans [10], on trouve différentes références concernant la liaison fractions continues-équations aux différences.

Mathematica. Ce qui est intéressant, comme nous le verrons plus loin, est que Nörlund entre en contact avec Robert de Montessus en 1910 au sujet des travaux de ce dernier sur les fractions continues algébriques. Le théorème de Robert de Montessus est alors déjà bien connu.

De plus, en faisant quelques hypothèses, on peut exprimer les p_k et q_k à l'aide des quantités A_i et B_j. Il est donc ainsi possible de construire des fractions continues dont les réduites sont une suite de fractions données.

De manière analogue, si les suites p_i et q_i sont des suites de polynômes, on définit une *fraction continue algébrique*. Par exemple, en 1768, Heinrich Lambert (1728-1777) obtient le développement de $\tan(x)$ [14] :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cdots}}}}}.$$

On peut aussi écrire la fonction exponentielle sous la forme d'un fraction continue algébrique [15] :

$$\exp(z) = 1 + \cfrac{z}{1 + \cfrac{z}{-2 + \cfrac{z}{-3 + \cfrac{z}{2 + \cdots}}}}.$$

Cette dernière expression est un exemple de développement en fraction continue qui entre typiquement dans la théorie des Approximants de Padé [16]. En effet, les réduites de la fraction continue ne sont rien d'autres que des approximants de Padé de la fonction exponentielle. Les approximants de Padé sont placés dans un tableau à double entrée, appelé *table de Padé* [17]. On obtient la suite de réduites par un déplacement dans la table de Padé associée à la fonction exponentielle. Pour voir cela, rappelons ce qu'est un approximant de Padé d'une fonction. Soit $f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i z^i$ une fonction [18] développable en série entière à l'origine, l'approximant de Padé $[L/M](z)$ de f est une fraction rationnelle dont le numérateur a un degré inférieur à L et le dénominateur un degré inférieur à M, et dont le développement en série entière en 0 coïncide jusqu'à l'ordre z^{L+M} inclus avec celui de f. On écrit cela :

$$f(z) - [L/M](z) = O\left(z^{L+M+1}\right).$$

Par exemple, l'approximant $[3/4]$ [19] de la fonction exponentielle :

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{5040}z^7 + \frac{17}{705600}z^8 + \cdots$$

est :

$$\frac{1 + \frac{3}{7}z + \frac{1}{14}z^2 + \frac{1}{210}z^3}{1 - \frac{4}{7}z + \frac{1}{7}z^2 - \frac{2}{105}z^3 + \frac{1}{840}z^4}.$$

14. Le résultat se trouve dans *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques*, Académie des Sciences de Berlin, 1768. H. Lambert utilise d'ailleurs le développement de tan pour montrer l'irrationnalité de π.

15. Ce développement en fraction continue algébrique peut s'obtenir à l'aide de logiciels de calcul formel. Dans le cas de Maple, la commande *cfrac* donne cette expression.

16. Henri Padé dans sa thèse [38] emploie l'expression de *fraction continue simple*, pp 42-93

17. Les numéros des lignes correspondent aux degrés de numérateurs, ceux des lignes aux degrés des dénominateurs.

18. On utilise pour la variable la lettre z, Henri Padé et Robert de Montessus utilisaient la lettre x.

19. Dans le cas de la fonction exponentielle, pour tout couple d'entier (n, p), il y a existence et unicité de l'approximant de Padé $[n/p]$.

Ces approximants sont donc disposés dans la *table de Padé*. Dans ce tableau, un bon choix d'approximants [20] génère une fraction continue algébrique dont les réduites sont justement les fractions choisies. Ce résultat se trouve dans l'étude systématique que Padé a faite de ces approximants dans sa thèse (1892). Les réduites de la fraction continue de la fonction *exp* donnée plus haut sont des approximants de Padé de la fonction exponentielle, $[n/n]$ ou $[n+1/n]$ [21].

A partir du milieu du XVIII ème siècle, après l'utilisation par Euler d'une fraction continue algébrique pour « sommer » la série ([7] [10] [50]),

$$1! - 2! + 3! - \cdots$$

puis durant tout le XIX ème siècle, les travaux sur les fractions continues algébriques vont se multiplier ([10] pp 190-259). Citons notamment les travaux de Lagrange (1736-1813) sur les fractions continues arithmétiques et algébriques [22]. C. Brezinski, [10] page 139, en commentant le mémoire de Lagrange *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral* [23] parle de *certificat de naissance des approximants de Padé*. En effet, non seulement Lagrange développe sous forme de fraction continue algébrique la fonction $(1+x)^m$, mais il remarque que les réduites successives ont des développements en série entière qui coïncident jusqu'à un ordre donné [24] avec celui de $(1+x)^m$. L'étude systématique des approximants de Padé revient à Henri Padé. Dans sa thèse [37], il définit, puis étudie, le tableau formé par ces fractions. Il met en particulier en évidence la structure en blocs du tableau. Henri Padé lie fractions continues algébriques et approximants de Padé. Sa thèse explore la question centrale suivante : partant d'une suite de fractions rationnelles, comment construit-on une fraction continue algébrique dont les réduites sont justement les fractions de départ ? Enfin, Padé consacre la fin de sa thèse au cas de la fonction exponentielle. Il dédie sa thèse à Charles Hermite (1822-1901) qui utilisa des approximants de Padé dans sa célèbre démonstration de la transcendance de e (1873) [25].

Le théorème

En 1902, débute pour Robert de Montessus une série de publications dans lesquelles il s'intéresse à la question de la convergence de fractions continues algébriques. Avant même la publication du théorème dans le Bulletin de la Société Mathématique de France, une note de Robert de Montessus est présentée à l'Académie des Sciences, par Paul Appell, lors de la séance du 23 Juin 1902. Robert de Montessus reprend là une étude de Laguerre de 1880 [23] sur le développement en fraction continue de la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$ [31]. Il prouve la convergence de la fraction continue obtenue par Laguerre en dehors de la coupure formée par l'intervalle $[-1, 1]$.

Le théorème de Robert de Montessus paraît donc dans le Bulletin de la Société Mathématique de France en 1902. Comme souvent alors, le titre de l'article n'est pas précis : *Sur les fractions continues algébriques*. La manière dont Robert de Montessus a écrit son article est certainement une des raisons pour lesquelles son résultat a un écho particulier. La brièveté de l'article a joué en ce sens. L'auteur va à l'essentiel. Robert de Montessus reprend ensuite son théorème dans la thèse. L'écriture y est encore

20. Cela revient à choisir un déplacement dans la table de Padé.

21. Le module « aide » du logiciel Maple donne cette indication.

22. On pourra consulter la bibliographie donnée dans [10] et le site Mathdoc, http ://portail.mathdoc.fr/OEUVRES/, qui renvoie aux oeuvres de Lagrange qui sont numérisées et consultables sur Gallica.

23. Ce mémoire est lu le 18 Juillet 1776 à l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin.

24. Pour une réduite donnée, cet ordre est la somme des degrés du numérateur et du dénominateur.

25. On pourra lire l'analyse de la démonstration de Hermite faite par Michel Waldschmidt sur Bibnum, http ://bibnum.education.fr/

plus condensée pour exprimer le théorème. Ceci s'explique par la composition de sa thèse car dans les paragraphes précèdant le résultat, Robert de Montessus développe de façon détaillée les liens entre fractions continues et approximants de Padé.

Comment Robert de Montessus a-t-il construit sa démonstration ? Il part d'une série entière notée y :

$$y = s_0 + s_1 x + \cdots + s_h x^h + \cdots \quad (s_0 \neq 0),$$

puis rappelle plusieurs notions dues à Henri Padé : table d'approximants de Padé ; normalité de la table et condition nécessaire pour avoir cette condition [26] ; liaison entre approximants de Padé, vus comme des réduites, et fraction continue. Il note l'approximant de Padé $[n/p]$ de y par :

$$\frac{U_p^n}{V_n^p}$$

où U_p^n et V_n^p sont des polynômes en x de degrés respectifs n et p. La table de Padé est donc :

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{U_0^0}{V_0^0} & \frac{U_0^1}{V_1^0} & \frac{U_0^2}{V_2^0} & \cdots & \frac{U_0^n}{V_n^0} & \cdots \\
\frac{U_1^0}{V_0^1} & \frac{U_1^1}{V_1^1} & \frac{U_1^2}{V_2^1} & \cdots & \frac{U_1^n}{V_n^1} & \cdots \\
\frac{U_2^0}{V_0^2} & \frac{U_2^1}{V_1^2} & \frac{U_2^2}{V_2^2} & \cdots & \frac{U_2^n}{V_n^2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\frac{U_p^0}{V_0^p} & \frac{U_p^1}{V_1^p} & \frac{U_p^2}{V_2^p} & \cdots & \frac{U_p^n}{V_n^p} & \cdots
\end{array}$$

Robert de Montessus explique que l'étude d'une suite de fractions bien choisies dans la table de Padé revient à l'étude d'une fraction continue. L'étude de la convergence de la fraction continue, qui est celle de la suite de ses réduites, est en fait l'étude de la convergence de la série associée à cette suite.

Robert de Montessus donne les conditions sur les degrés des numérateurs et des dénominateurs des fractions choisies dans la table de Padé. Ainsi si chacune des fractions est *plus avancée que la précédente* [27], la suite de fraction est bien la suite des réduites d'une fraction continue algébrique. Il simplifie le problème en faisant l'hypothèse que les fractions de la suite doivent être toutes consécutives. Cela signifie que si

$$\frac{U_i}{V_i} = \frac{U_p^n}{V_n^p},\ \frac{U_{i+1}}{V_{i+1}} = \frac{U_q^m}{V_m^q}$$

alors $p+n+1 = q+m$ ou $p+n+2 = q+m$. Robert de Montessus se place dans la situation particulière des lignes du tableau. Il considère le cas de la suite :

$$\frac{U_p^0}{V_0^p},\ \frac{U_p^1}{V_1^p},\ \ldots, \frac{U_p^n}{V_n^p},\ \ldots.$$

Il en vient ensuite aux deux questions essentielles posées dans notre introduction et qui sont la reconstruction de la fonction donnée par la série et son éventuel prolongement analytique. Robert de Montessus considère une fonction méromorphe, analytique à l'origine, dont le développement est donné par y. Sa démonstration s'appuie sur des résultats de Hadamard [16] (1865-1963), sur le comportement

26. Dire que la table est *normale* signifie que l'on a existence et unicité de l'approximant de Padé et que celui-ci n'apparaît qu'une seule fois dans la table.

27. $\frac{U_p^n}{V_n^p}$ est plus avancée que $\frac{U_q^m}{V_m^q}$ si $p+n > m+q$.

asymptotique de polynômes dits *polynômes de Hadamard*[28] et sur celui des déterminants de Hankel (1839-1873) H_p^m associés à la série y. L'expression générale des déterminants de Hankel est :

$$H_p^m = \begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{m+p-1} \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \cdots & s_{m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m+p-1} & s_{m+p} & \cdots & s_{m+2p-2} \end{vmatrix}.$$

Ils apparaissent naturellement quand on traduit, en terme de système linéaire, une condition du type :

$$f(z) - [L/M](z) = O\left(z^{L+M+1}\right)$$

Les inconnues du système sont les coefficients du dénominateur de l'approximant (ou de la réduite). Quant aux polynômes dits de Hadamard, ils ont été en fait déjà introduits par Carl Jabobi (1804-1851) en 1846 [29]. Leur expression générale est :

$$\frac{\begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{m+p-1} & 1 \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \cdots & s_{m+p} & u \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ s_{m+p-1} & s_{m+p} & \cdots & s_{m+2p-2} & u^{p-1} \\ s_{m+p} & s_{m+p} & \cdots & s_{m+2p-1} & u^p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{m+p-1} \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \cdots & s_{m+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m+p-1} & s_{m+p} & \cdots & s_{m+2p-2} \end{vmatrix}}.$$

En effet, les dénominateurs des réduites, les V_n^p, ne sont rien d'autre que des polynômes de Hadamard de même degré p. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots$, les pôles de la fonction f. En faisant l'hypothèse que

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leq |\alpha_{p+2}| \leq \cdots,$$

Hadamard a montré que les $V_n^p(x)$ tendent vers le polynôme

$$V^p(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{x}{\alpha_p}\right)$$

C'est ici que se trouve la clé du résultat. Robert de Montessus fait le lien entre les dénominateurs des approximants de Padé particuliers qu'il considère et le résultat de Jacques Hadamard qui se trouve page 41 de [17]. Robert de Montessus poursuit alors son raisonnement sur la série liée à la fraction continue :

$$\frac{U_p^0}{V_0^p} + \left(\frac{U_p^1}{V_1^p} - \frac{U_p^0}{V_0^p}\right) + \left(\frac{U_p^2}{V_2^p} - \frac{U_p^1}{V_1^p}\right) + \cdots$$

C'est une série de fractions rationnelles dont on connaît le comportement asymptotique des dénominateurs, ce qui permet de ramener l'étude de la convergence à celle d'une série exprimée sans ces dénominateurs. La convergence étant établie, il lui reste à montrer que la limite est bien la fonction méromorphe. Robert de Montessus prouve ainsi le théorème suivant [30] :

28. P. Henrici (1923-1987) dans [18], pp 622-633, utilise cette expression.

29. Jacobi, C. G. J.,Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function, J. Reine Angew. Math. 30, 127-156.

30. L'énoncé du théorème est donné en conclusion à l'article.

[...] qu'étant donnée une série de Taylor représentant une fonction $f(x)$ dont les p pôles les plus rapprochés de l'origine sont intérieurs à un cercle (C) lui-même intérieur aux pôles suivants, chaque pôle multiple étant compté pour autant de pôles simples qu'il existe d'unités dans son degré de multiplicité, la fraction continue déduite de la ligne horizontale de rang p du Tableau de M. Padé, ce tableau étant composé de réduites normales, représente la fonction $f(x)$ dans un cercle de rayon $|\alpha_{p+1}|$, où α_{p+1} est l'affixe du pôle le plus rapproché de l'origine parmi tous ceux qui sont extérieurs au cercle (C).

A titre de comparaison, sur l'énoncé du théorème, donnons la formulation faite soixante-dix ans plus tard par E.B. Saff [45] :

Let $f(z)$ be analytic at $z = 0$ and meromorphic with precisely ν poles (multiplicity counted) in the disk $|z| < \tau$. Let D the domain obtained from $|z| < \tau$ by deleting the ν poles of $f(z)$. Then, for all n sufficiently large, there exits a unique rational function $R_{n,\nu}$, of type (n, ν), which interpolates to $f(z)$ in the point $z = 0$ considered of multiplicity $n+\nu+1$. Each $R_{n,\nu}$ has precisely ν finite poles and, as $n \to \infty$, these poles approach, respectively, the ν poles of $f(z)$ in $|z| < \tau$. The sequence $R_{n,\nu}$ converges throughout D to $f(z)$, uniformly on any compact subset of D.

Remarquons qu'il n'est pas question, dans l'article de Saff, de fractions continues. Ce sont des notions d'interpolation et d'approximation qui sont mises en avant. D'ailleurs dans un précédent article [31], Saff fait référence à un article de J.L. Walsh (1895-1973) [32]. En introduction à cet article, Saff écrit :

The $W_{n\mu}$ form a table of double entry (...) known as the Walsh array which is similar in form and properties to the table of Padé. Indeed, J.L. Walsh has for the rows of this array established (...) the following analogue of the important result (...) of Montessus de Ballore concerning the convergence of the rows of the Padé table.

Contexte et Genèse

Robert de Montessus obtient sa licence ès-sciences en 1901. Il débute alors une thèse et c'est Paul Appell qui lui propose de travailler sur la question de la convergence de fractions continues algébriques. Les lettres, dont nous donnons des extraits ci-dessous, le prouvent. Ainsi rapidement Robert de Montessus va s'intéresser aux travaux de Henri Padé et à ceux d'Edmond Laguerre.

Edmond Laguerre, connu en particulier pour les polynômes orthogonaux du même nom, a été un mathématicien qui, malgré une vie plutôt courte (1834-1886) et des problèmes de santé, a beaucoup publié : près de 150 articles (voir [24] et [25]). Henri Poincaré écrit dans la préface des *Oeuvres complètes de Laguerre* [24] :

L'étude des fractions continues algébriques nous permettra sans doute un jour de représenter les fonctions par des développements beaucoup plus convergents que les séries de puissances ; mais peu de géomètres n'ont osé s'aventurer dans ce domaine inconnu qui nous réserve bien des surprises ; Laguerre y fut conduit par ses recherches sur les polynômes qui satisfont une équation différentielle linéaire. De tous les résultats qu'il obtint, je ne veux qu'en citer un, parce que c'est le plus surprenant et le plus suggestif. D'une série divergente, on peut en déduire une fraction continue convergente : c'est là un nouveau mode d'emploi légitime des séries divergentes qui est sans doute destiné à un grand avenir.

31. Saff E.B., On the row convergence of the Walsh array of meromorphic functions, Transactions of the American Mathematical Society, vil. 146, 1969.

32. J. L. Walsh, The Convergence of Sequences of Rational Functions of Best Approximation. II, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 116 (Apr., 1965), pp. 227-237.

Dans le même ouvrage, on trouve notamment deux articles intitulés *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels*, travaux qui seront prolongés par Robert de Montessus [31]. Si Henri Poincaré souligne l'importance que revêt l'étude des fractions continues algébriques en cette fin du XIX ème siècle, c'est que lui-même s'intéresse à la question. Tout d'abord il publie des articles sur les fractions continues (par exemple [41] [42]) et les utilise dans la résolution d'équations différentielles [43]. De plus, la question de la sommation d'une série divergente est très présente dans les travaux de Poincaré : c'est le cas par exemple dans le tome 2 des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* paru en 1892. Ajoutons que Emile Borel (1871-1956) dans [7] consacre un chapitre à la théorie des *séries asymptotiques* dont il attribue la création conjointement à Henri Poincaré et à Thomas Stieltjes.

Revenons à Paul Appell. Il s'est aussi préoccupé de fractions continues. On peut citer une oeuvre de jeunesse, *Sur les fractions continues périodiques* [3]. Néanmoins, c'est certainement par ses travaux en Analyse, notamment les développements en série de fonctions d'une ou plusieurs variables qu'il a étudiés et utilisés, qu'il aura le plus influencé Robert de Montessus [33].

Comment Henri Padé lui-même percevait-il la question de la convergence des fractions continues algébriques ? Dans *Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions* [38], article de synthèse datant de 1907, Henri Padé souligne l'importance de ce sujet. Il écrit, citant plusieurs mathématiciens :

> *La question de la convergergence n'apparaît pas dans les recherches de Lagrange et de Laplace sur la transformation en fractions continues de séries entières ; non plus que dans celles de Gauss, à propos de sa célèbre fraction continue provenant du quotient de deux séries hypergéométriques. On ne trouve rien, dans l'oeuvre immense de Cauchy, qui ait trait à cette question ; et, si l'on peut mentionner, vers le milieu du XIXe siècle, les recherches, plus abondantes que fructueuses, de Stern et de Seidel, celles aussi de Heine, il faut arriver au travail posthume de Riemann (1863) : Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometrie in frazione continua infinita, resté bien incomplet, malgré la restitution de M. Schwarz, et aux beaux et lumineux Mémoires de Thomé sur le même sujet et parus dans les tomes 66 et 67 (1866, 1867) du Journal de Crelle, pour rencontrer les premières Oeuvres vraiment importantes se rapportant à cet objet (...)*
>
> *Depuis lors, se sont succédées les recherches de Laguerre, d'Halphen, de M. Pincherle, de Markoff : et, depuis dix ans, et à ne citer que les principales, celles de Stieltjes (1894), de MM. von Koch, van Vleck et Pringsheim ; enfin, et tout récemment, deux notes aux Comptes rendus et deux courts mémoires parus dans le Bulletin de la Société Mathématique de France (1902) et dans les Annales de la Société Scientifique de Bruxelles de (1903), de M. R. de Montessus de Ballore.*

Pour Henri Padé, les premiers résultats significatifs de convergence d'une fraction continue algébrique apparaissent au début des années 1860. Son historique est cependant incomplet. Adrien Legendre (1752-1833) peut être mentionné pour sa preuve de la convergence du développement en fraction continue algébrique de la fonction tangente, obtenu, comme nous l'avons dit plus haut, par Lambert. On trouve cette démonstration par exemple dans l'édition de 1837 des *Eléments de Géométrie* de Legendre [27]. Examinons les noms donnés par Padé. Concernant Bernhard Riemann (1826-1866) et Ludwig Wilhelm Thomé (1841-1910), Padé fait allusion à leurs travaux portant sur la convergence de fractions

33. Appell procède dans [4] à une première analyse de ses travaux. Cette notice a vraisemblablement été rédigée pour sa candidature à l'Académie des Sciences. Appell montre l'importance de ses développements en séries pour des problèmes tels que la théorie du potentiel, les équations différentielles linéaires, l'étude des fonctions hypergéométriques.

continues construites à partir de quotients de fonctions hypergéométriques [47]. Edward Burr Van Vleck (1863-1943), mathématicien américain qui soutint une thèse à Göttingen, *Zur Kettenbruchentwickelung Hyperelliptischer und Ahnlicher Integrale*, sous la direction de Félix Klein [48], développe en 1903 [49], dans plusieurs leçons les questions précédentes et revient sur les travaux des mathématiciens cités par Padé [34]. Si Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) est cité, on doit cependant mentionner à la fois Pafnuty Lvovich Chebyshev (Tchebychev) (1821-1894) et Konstantin Aleksandrovich Posse (1847-1928), élève, comme Markov, de Chebyshev. Georges Henri Halphen (1844-1889) étudie en particulier la convergence de fractions continues associées à $\sqrt{X}$ où X désigne un polynôme de degré 3 à coefficients et à racines réels [10] pp 200-201. Si Henri Padé mentionne Salvatore Pincherle (1853-1936), c'est pour ses résultats obtenus dans le cadre d'équations linéaires aux différences finies qu'il lie à des fractions continues algébriques (voir sa notice sur travaux [40]). Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924), quant à lui, fut un élève de Mittag-Leffler et généralise en particulier un résultat de convergence dû à Thomas Stieltjes [22]. Concernant Stieltjes (1856-1894), Emile Borel consacre sans ses *Leçons sur les divergentes* [8], un chapitre [35] aux fractions continues et à la théorie de Stieltjes. Emile Borel écrit page 63 :

Le point de départ des recherches de Stieltjes [36] *est la fraction continue*

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

où les a_n sont des nombres réels et positifs et z une variable complexe.

puis

Le seul cas dont nous aurons à nous occuper ici est celui où la série $\sum a_n$ est divergente. La fraction continue est alors convergente et définit une fonction holomorphe dans tout le plan de la variable complexe, exception faite des points de la partie négative de l'axe réel (...)

La fraction continue peut être développée en série suivant les puissances de $\frac{1}{z}$ (...) On obtient ainsi ce développement sous la forme

$$F = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} \cdots$$

Les nombres $c_0, c_1, c_2, \cdots$ sont positifs ; Stieltjes donne le moyen d'obtenir leurs expressions en fonction des a_n mais ces expressions sont compliquées. Au contraire, les a_n s'expriment au moyen des c_n sous une forme très élégante (...)

Le mathématicien allemand Alfred Pringsheim (1850-1941), cité également par Padé, montre plusieurs résultats de convergence sur les fractions continues classiques (voir [10]) mais aussi revient

34. La bibliographie donnée par Van Vleck est particulièrement intéressante.

35. D'ailleurs dans cette partie de l'ouvrage, Emile Borel évoque les travaux de Henri Padé et donc le lien entre les approximants de Padé et les fractions continues algébriques.

36. Les travaux de Stieltjes en *théorie analytique des fractions continues* sont indissociables du *problème des moments* : étant donnée une suite de réels $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ existe-t-il une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout n on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mu(dx) = m_n \ ?$$

. Certains auteurs considérent Stieltjes comme le *père* de la théorie analytique des fractions continues[10][21].

sur les preuves de Lambert et de Legendre de l'irrationnalité de π dans un article de 1901 dont on peut lire une critique dans le Bulletin des Sciences Mathématiques [37] [38].

Les travaux sur la convergence des fractions continues algébriques sont liés à la question du *prolongement analytique* qui est un des sujets fondamentaux en Analyse à la fin du XIX ème siècle et au début du XX ème siècle. Dans la version française du livre d'histoire des mathématiques de Walter William Rouse Ball [44], parue en 1907 et à laquelle Robert de Montessus a contribué, cette question est abordée, dans le paragraphe *Analyse* [39], page 202. Robert de Montessus écrit :

> *Toujours dans le même ordre d'idées, Weierstrass, MM. Poincaré, Borel, Pringsheim, Lerch, Zoretti ont heureusement étudié les prolongements analytiques, avec ou sans espaces lacunaires, Laguerre, MM. Borel, Lindelöf et P. Boutroux ont lié la croissance des fonctions aux notions de genre et d'ordre, M. Painlevé enfin a étudié les équations différentielles à ce même point de vue, fondamental, de la croissance.*

Soulignons que pour Borel, cette question du prolongement analytique va le conduire à construire de nouvelles notions de mesure et de topologie [30]. Deux mathématiciens qui ont correspondu avec Robert de Montessus, Jacques Hadamard et Eugène Fabry, ont obtenu des résultats importants sur cette question. Il est bien connu que Jacques Hadamard a démontré ses théorèmes majeurs dans ce domaine entre 1888 et 1902. Sa thèse, soutenue en 1892, s'intitule *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* [16]. Nous ne savons pas si Robert de Montessus a correspondu de façon active avec Hadamard [40]. On constate néanmoins que Robert de Montessus s'appuie fortement sur les travaux de Jacques Hadamard pour la démonstration de son théorème. Eugène Fabry [41] (1856-1944), professeur à l'Université de Montpellier, publie, quant à lui, notamment en 1896 dans les Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, l'article intitulé *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux*.

Le contexte étant établi, comment Robert de Montessus a-t-il débuté concrètement ses travaux sur les fractions continues algébriques ? Paul Appell l'introduit dans un cercle de mathématiciens travaillant sur le sujet que l'on peut placer dans le domaine de l'Analyse selon la classification de [28] et [13]. Juliette Leloup écrit page page 68 de [28] :

> *Quant aux thèses d'arithmétique, elles constituent en elles-mêmes un corpus particulier dans la mesure où les rapports sont systématiquement élogieux sur les travaux présentés, dès lors que le travail fait apparaître, selon le rapport, des liens forts avec la théorie des fonctions : on évoquera ainsi les mémoires de Cotty, Châtelet, Got et Chapelon, ou encore les applications des nouveaux outils de la théorie des fonctions à la théorie des fractions continues dans la thèse de Montessus de Ballore.*

Pour J. Leloup, les fractions continues se situent aux confins de l'Arithmétique et de l'Analyse.

37. tome 25, année 1901, seconde partie, pages 86-88

38. Alfred Pringsheim explique que Lambert avait démontré la convergence de la fractions continue algébrique associée à $\tan(x)$. On pourra se rapporter à l'article de R Wallisser, *On Lambert's proof of the irrationality of* π, in Algebraic number theory and Diophantine analysis, Graz, 1998 (de Gruyter, Berlin, 2000,) pp 521-530.

39. Ce paragraphe est marqué d'un astérisque, donc comme cela est indiqué dans l'introduction de l'ouvrage, c'est un ajout de Robert de Montessus. Robert de Montessus cite en particulier Hadamard et le mathématicien finlandais Ernst Lindelöf.

40. Nous avons juste retrouvé une lettre non datée de Hadamard indiquant à Robert de Montessus où trouver son article intitulé *Sur certaines surfaces minima*.

41. Il en fait état dans une lettre, dont nous donnons un extrait un peu plus loin, adressée à Robert de Montessus en 1901.

Une lettre de Charles-Ange Laisant [42] datée du 30/10/1900 [43] montre que Robert de Montessus, alors étudiant en licence à la Faculté des Sciences de Paris, cherche à se rapprocher [44] de Paul Appell :

> *Cher collègue,*
>
> *Une fois la rentrée faite, en Novembre, j'espère voir M. Appell et lui parler de vous, selon votre désir. Nous vous ferons signe le moment venu [...]*

Robert de Montessus obtient la licence ès Sciences-Mathématiques le 24 Octobre 1901 [45]. Il débute ensuite une thèse de doctorat d'état sous la direction de Paul Appell. Paul Appell est membre de l'Académie des Sciences depuis 1892 et devient doyen de la Faculté des Sciences de Paris en 1903. Il aidera Robert de Montessus durant toute sa carrière [46].

Les premiers signes de l'existence du théorème de Robert de Montessus que nous avons trouvés apparaissent dans une lettre de Henri Padé du 26 Novembre 1901 [47] :

> *[...] J'ai d'ailleurs vu M. Appell au commencement de ce mois, il m'a parlé de vous et m'avait fait parvenir votre lettre.*
>
> *La théorie des fractions continue offre un champ très vaste de recherches, mais où il n'est pas toujours facile de se rendre compte à l' avance des difficultés que l'on rencontrera. C'est donc avec toutes sortes de réserves que je vous indiquerai, comme devant présenter un grand intérêt, une étude approfondie de la généralisation des fractions continues. Je n'ai fait qu'effleurer le sujet dans un mémoire qui a paru, il y a quelques années dans le journal de M. Jordan, que je me fais un plaisir de vous envoyer en même temps que cette lettre. Vous y trouverez l'indication d'un mémoire de M. Hermite, sur le même sujet. Dans ce mémoire, M. Hermite arrive à la méthode des polynômes associés par des considérations [...] de calcul intégral : il serait, sans doute, aussi bien intéressant d'approfondir davantage le rapport entre le calcul intégral et les lois de récurrence de la théorie des fractions continues.*
>
> *Le résultat que vous m'annoncez avoir obtenu me paraît des plus remarquables, mais doit être soumis à des exceptions assez nombreuses. Je lirai avec plaisir votre démonstration quand vous l'aurez publiée. [...]*

Peu de temps après cette lettre de Henri Padé [48], dans un courrier daté du 3 Décembre 1901 [49], Paul Appell écrit à Robert de Montessus :

> *Vos résultats me semblent intéressants et je suis d'avis que vous les indiquiez [...] dans une note à la Société Mathématique [...]*

De plus, dans un dossier se trouvant dans le fonds Robert de Montessus, nommé *Fractions continues* [50], des notes de Robert de Montessus nous permettent de voir les travaux liés aux fractions continues qu'il a consultés au début de ses recherches, comme par exemple ceux de Hermite sur la fonction exp et ceux de Stieltjes.

---

42. Charles-Ange Laisant, 1841-1920, polytechnicien, mathématicien, homme politique français, fondateur de l'*Intermédiaire des mathématiciens* et, avec Henri Fehr, de l'*Enseignement mathématique*.
43. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres de C. A. Laisant.
44. Robert de Montessus a eu, vraisemblablement, Paul Appell comme professeur lors de ses études en licence.
45. D'après ce qui est inscrit dans le procès verbal de la thèse.
46. Nous affirmons cela compte-tenu de l'ensemble des lettres de Paul Appell se trouvant dans le fonds Robert de Montessus. Paul Appell intervient soit pour des lettres de recommandations, soit encore, par exemple, pour l'autorisation de donner des cours à la Sorbonne.
47. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres Padé.
48. Henri Padé est à ce moment-là professeur à l'université de Poitiers.
49. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres Appell.
50. Recueil de documents de Robert de Montessus, période 1897-1937.

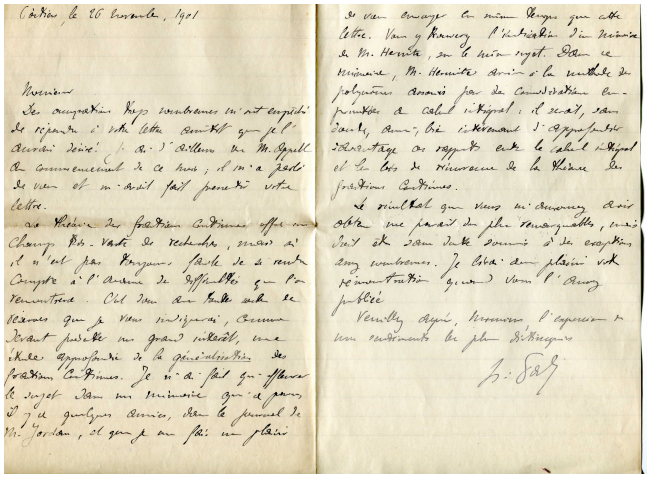


FIGURE 3 – lettre de Henri Padé du 26/11/1901

On trouve aussi les noms *Hurwitz* (1859-1919) et *Minkowski* (1864-1909). Toujours dans ce même dossier se trouve l'article de Salvator Pincherle *Sur la généralisation de systèmes récurrents au moyen d'une équation différentielle* paru en 1892 dans Acta Mathematica. Alfred Pringsheim, dans une lettre du 4/2/1901, donne plusieurs références d'articles.

Dans le même temps, Robert de Montessus correspond avec Eugène Fabry (1856-1944) dont les travaux sur les séries de Taylor font référence. Fabry adresse deux lettres à Robert de Montessus les 12 Octobre 1901 et 7 Janvier 1902. L'importance des travaux de Fabry est décrite par Emile Borel dans la notice nécrologique sur Eugène Fabry, lue à l'Académie des Sciences pendant la séance du 23 Octobre 1944 [51]. En effet, elle donne un panorama complet des recherches de Fabry. En particulier, Emile Borel écrit :

> *Eugène Fabry consacra ensuite ses recherches à un problème important et difficile, déjà abordé avant lui par de nombreux mathématiciens, notamment par notre éminent Confrère Jacques Hadamard. Il s'agit de chercher et d'étudier les points singuliers situés sur le cercle de convergence d'un développement de Taylor, qui définit une fonction analytique à l'intérieur du cercle. L'idée originale de Fabry fut de substituer à l'étude de la suite complète des coefficients de la série de Taylor, celle de suites partielles de coefficients extraites de cette suite complète.*

Les deux lettres de Fabry, en réponse à Robert de Montessus, portent justement sur les séries de Taylor et leurs singularités :

> (lettre du 12 Octobre 1901) *Le théorème que vous m'indiquez ne peut pas être exact sous la forme la plus générale. Il est possible que le second énoncé soit exact mais le premier ne l'est pas. Si la série n'a qu'un point singulier sur la circonférence de convergence, on ne peut affirmer que* $\frac{s_n}{s_{n+1}}$ *ait une limite. Cela résulte des théorèmes que j'ai indiqués dans les Acta Math (Tome 22, page 86). J'ai en effet montré qu'il existe des séries incomplètes n'ayant qu'un seul point singulier sur la circonférence de convergence.* $\frac{s_n}{s_{n+1}}$ *a alors des valeurs nulles et infinies, et ne peut avoir aucune limite. L'exemple que j'ai donné est le*

51. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 1944, Bibliothèque Nationale de France.

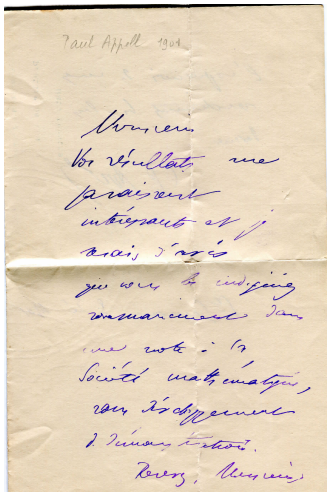


FIGURE 4 – lettre de Paul Appell, 3/12/1901

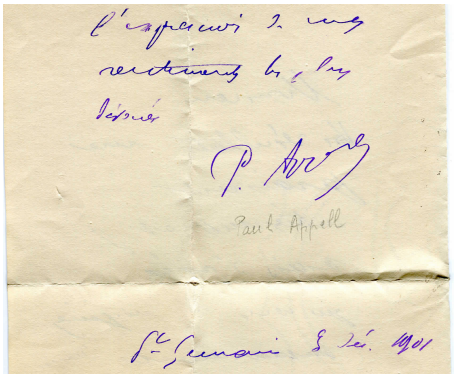


FIGURE 5 – lettre de Paul Appell, 3/12/1901

suivant :

$$\sum x^n e^{n\left[-1+\cos(Ln)^\theta\right]} \quad 0<\theta<1$$

[...]

En résumé, je ne peux pas vous donner de réponse absolument précise sur l'exactitude du théorème que vous énoncez ; mais je ne serais pas étonné qu'il soit exact en prenant le second énoncé.

Cette question me parait très intéressante et doit conduire à des résultats importants.

puis

(lettre du 7 Janvier 1902) *[...] Si vous voulez avoir une idée des travaux publiés sur la série de Taylor, vous pourrez trouver des renseignements très complets dans un petit traité publié par M. Hadamard au mois de mai dernier sur " la série de Taylor et son prolongement analytique" dans la collection Scienta (...).*

Cette seconde lettre de Fabry éclaire la première. Fabry donne à Robert de Montessus comme nouvelle référence le livre de Hadamard. En effet, dans [17], Hadamard s'intéresse aux singularités d'une fonction développable en série entière à l'origine, de développement

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

ayant pour rayon R et pour cercle de convergence C. Hadamard considère, comme l'avait fait Lecornu [52], le rapport $\dfrac{a_m}{a_{m+1}}$ et précise page 19 :

En effet, d'une part, comme nous l'avons dit, $\dfrac{a_m}{a_{m+1}}$ n'a pas, en général, de limite. D'autre part, il peut y avoir plusieurs singularités sur C. Dès lors on peut supposer à la proposition en question trois sens différents :

1. *Si x_0 est le seul point singulier sur C, le rapport $\dfrac{a_m}{a_{m+1}}$ a pour limite x_0.*

52. Lecornu affirma en 1887 dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, que l'existence d'une limite pour le rapport $\dfrac{a_m}{a_{m+1}}$, entraînait que cette limite soit l'unique point singulier de la fonction sur C.

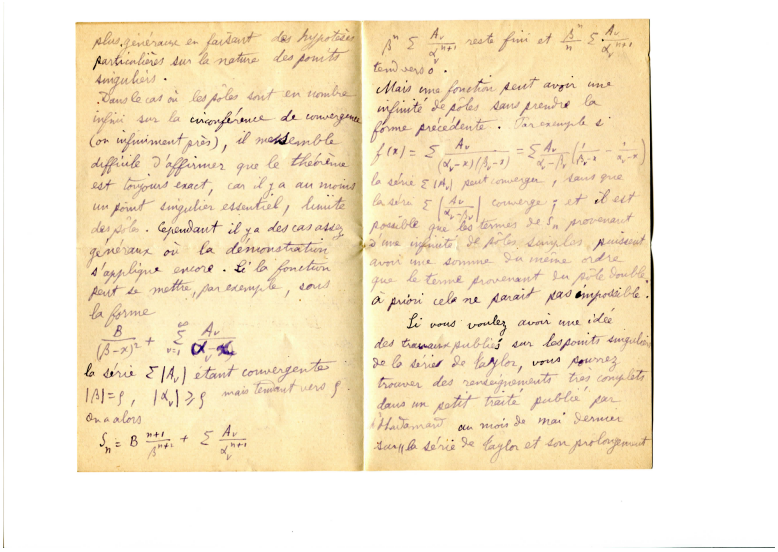


FIGURE 6 – lettre (extrait) de Fabry du 7/1/1902

2. *Si* $\dfrac{a_m}{a_{m+1}}$ *a une limite* x_0*, le point d'affixe* x_0 *est le seul point singulier de la fonction sur* C*.*
3. *Si* $\dfrac{a_m}{a_{m+1}}$ *a une limite* x_0*, le point d'affixe* x_0 *est un point singulier de la fonction.*

Jacques Hadamard montre en effet que les deux premières affirmations sont fausses contrairement à la troisième qui a été prouvée par Fabry.

Deux autres lettres de Henri Padé[53] montrent que Robert de Montessus lui a fait part de ses résultats. Les deux mathématiciens ont-ils conversé directement ? Henri Padé[54] est alors professeur à l'Université de Poitiers [9]. Robert de Montessus et Henri Padé ont tous les deux participé au Congrès International des Mathématiciens de Août 1900 à Paris. Il est donc fort probable qu'ils se soient rencontrés à cette occasion. D'ailleurs, Robert de Montessus a reçu un exemplaire signé de la communication faite par Henri Padé à ce congrès, intitulée *Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues*. A partir d'Octobre 1902, Robert de Montessus habite à Lille. A l'automne 1902, Robert de Montessus devient en effet chargé de cours à la faculté catholique de Lille. En 1903 il est nommé Maître de conférences et chargé des cours de Mathématiques spéciales et mécanique rationnelle[55].

Faisons un petite parenthèse sur le lexique. Padé parlait dans ses articles de *fraction approchée* pour désigner un des approximants qui portent aujourd'hui son nom. En 1903, dans un des ses articles, cité ci-dessous, Van Vleck utilise le mot anglais *approximant* : c'est peut-être ce passage à l'anglais qui a consacré en français le terme d'approximant de Padé.

53. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres de Padé.
54. Notons que Paul Appell faisait partie du jury de thèse de Henri Padé. Il fut aussi un de ses professeurs à Paris.
55. Ainsi dans le procès verbal de la séance du 7 Novembre 1902 du conseil de la Faculté des Sciences de l'Université Faculté de Lille, Robert d'Adhémar (1874-1941), qui à l'époque est maître de conférence dans cette faculté, indique, que devant enseigner l'Analyse, il a besoin d'un suppléant pour l'enseignement des Mathématiques Spéciales. Il propose le nom de Robert de Montessus. Les procès verbaux des séances de la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Lille pour les années 1886 à 1924 sont conservés aux archives de cette université sous la cote S7E.

Les extraits de ces deux courriers de Padé témoignent de leurs échanges mathématiques :

> (lettre du 17/12/1901) *Je ne vois que des compliments à vous adresser, et la communication que vous proposez de faire à la société mathématiques me semble devoir être des plus intéressantes.*
>
> *Vous considérez, d'après votre lettre, les réduites qui forment la "ligne horizontale de rang p". Je pense qu'il s'agit des réduites pour lesquelles le degré du dénominateur est p. [...]*
>
> *Enfin, vous savez que dans mes derniers travaux j'ai changé cette notation et la notion de tableau [...]*
>
> *Dans cette situation, les fractions qui convergent vers la fonction seraient toutes celles qui correspondent à une même valeur de μ [...]*

Robert de Montessus n'adoptera les nouvelles notations suggérée par Henri Padé. Ainsi il note la réduite (n, p), qui correspond à l'approximant de Padé $[n, p]$ de la fonction $f(x)$ en question, par $\frac{U_p^n}{V_n^p}$ avec U_p^n un polynôme de degré égal à n et V_n^p un polynôme de degré égal à p (dans le cas d'une table normale).

> (lettre du 20/6/1902) *Pour ce qui touche le numéro 1 de votre note, sur lequel vous me demandez particulièrement mon avis, je vous fais confidence que c'est un point que j'ai déjà cherché à élucider moi-même. J'ai présenté à ce sujet une note à l'académie [...]*
>
> *Cette coïncidence n'a pas lieu de vous étonner, n'est-ce-pas, et nous ne pouvons pas espérer, que travaillant les mêmes questions, il n'arrivera jamais que nous parvenions aux mêmes résultats.*

Henri Padé fait référence à son article paru en 1902, *Recherches nouvelles sur la distribution des fractions approchées d'une fonction*, dans les Annales Scientifiques de l'ENS [56]. La dernière phrase de l'extrait est à mettre en perspective avec la question de priorité qui s'est installée entre Robert de Montessus et Henri Padé et dont nous allons parler.

Polémique entre Robert de Montessus et Henri Padé

Après la lecture de l'article de Padé, *Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions* [38], Robert de Montessus adresse, à la fin de l'année 1907, une lettre [57] de protestation à Emile Picard, directeur des Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. Un extrait de cette lettre est publié dans les Annales [33], en 1908. Robert de Montessus débute sa lettre par :

> *Dans un Mémoire que les Annales ont récemment publié (septembre-octobre 1907), M. Padé pose la question de priorité entre lui et moi.*
>
> *De ses citations il m'est permis de conclure que M. Padé n'est pas informé des résultats que j'ai obtenus et je demande la permission de les rappeler.*
>
> *Il est vrai que M. Padé s'occupe de fractions continues depuis 1891, telle est du moins la date de sa Thèse, et que je suis nouveau venu dans la question.*

56. 3 ème série, tome 19, 1902, pp 153-189
57. Dans le fonds Robert de Montessus, on trouve la lettre en réponse d'Emile Picard (1/1/1908).

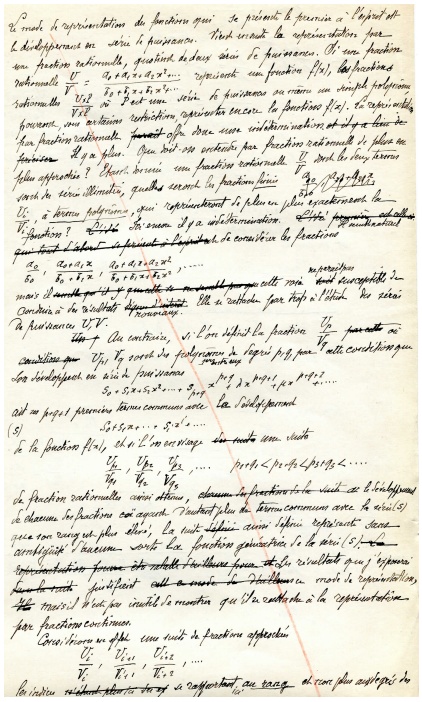


FIGURE 7 – brouillon de Robert de Montessus

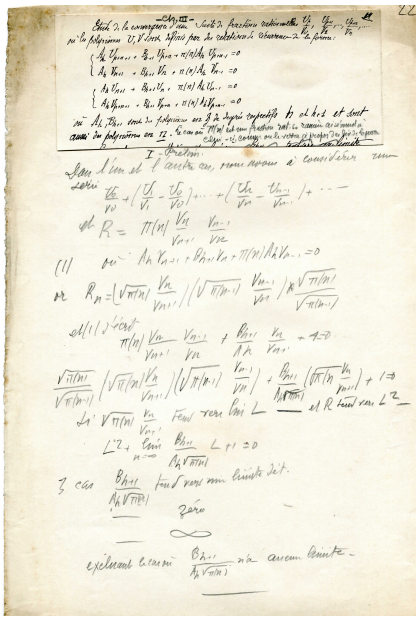


FIGURE 8 – brouillon de Robert de Montessus

Le point de départ de la polémique est donc l'article écrit par Padé sur les fractions continues en 1907. La réaction de Robert de Montessus, même si dans l'extrait de sa lettre il parle de *question de priorité entre lui et moi* , porte sur la convergence du développement en fraction continue de la fonction

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}.$$

En effet, Henri Padé écrit dans l'article de 1907, à la page 358 :

> *Enfin, la convergence de la série équivalente à la fraction continue étant supposé établie, comment en résulte-t-il que sa somme, c'est-à-dire la valeur de la fraction continue, soit égale à la fonction* $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}$ *?*
> *Aucune indication sur la démonstration de ce point capital de nous est fournie par les notes de M. de Montessus.*

Mais Henri Padé se fonde sur trois articles de Robert de Montessus parus en 1902, 1903 et 1904 en oubliant à la fois la thèse de Montessus, publiée en 1905, et une note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences datée du 29 Mai 1905 dans lesquelles Robert de Montessus prouve que la limite des réduites est bien la fonction. La fonction ci-dessus est un cas particulier de fonctions satisfaisant une équation différentielle du type

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z(z) + P(z)$$

où a, b, c, d, p et q sont des constantes et P un polynôme. Robert de Montessus a repris les travaux de Laguerre sur le développement en fraction continue d'une telle fonction. Padé à son tour reconsidère le problème en utilisant n'importe quelle fraction continue issue de sa table de Padé et en recherchant une expression sous forme intégrale du reste entre la fonction et une réduite. Il a déjà procédé de la sorte

pour la fonction exponentielle. Cette idée est une constante dans les travaux de Padé et diffère des méthodes employées par Robert de Montessus pour montrer des convergences. Finalement, les travaux de Robert de Montessus et ceux de Padé se complètent [58].

La diffusion du théorème

Avant 1914

La diffusion du théorème s'est faite rapidement avant 1914 sous l'effet de trois facteurs. Le premier facteur, ce sont les références faites au résultat de Robert de Montessus par Padé, Van Vleck et Nörlund. Rappelons que Robert de Montessus avait fait part à Henri Padé de sa démonstration au début de l'année 1902. En 1903, Van Vleck dans une série de conférences données à Boston mentionne le résultat de Robert de Montessus. En effet, il écrit dans *Padé's Table of Approximants and its Applications.* [49] :

> *In investigating the convergence of the horizontal lines the first case to be considered is naturally that of a function having a number of poles and no other singularities within a prescribed distance of the origin. It is just this case that Montessus [33, a] has examined very recently. Some of you may recall that four years ago in the Cambridge colloquium Professor Osgood took Hadamard's thesis as the basis of one of his lectures. This notable thesis is devoted chiefly to series defining functions with polar singularities. Montessus builds upon this thesis and applies it to a table possessing a normal character. Although his proof is subject to this limitation, his conclusion is nevertheless valid when the table is not normal, as I shall show in some subsequent paper.*

Van Vleck précise ce que nous avons déjà indiqué, à savoir que Robert de Montessus a utilisé les résultats de Hadamard sur les singularités polaires. De plus, Van Vleck signale un point nouveau : le théorème reste valable même si la table de Padé n'est pas normale. En cela, il donne à la fois une audience au théorème et un prolongement de celui-ci. En 1910, N.E. Nörlund [59] écrit à Robert de Montessus :

> *Les « Rendiconti di Palermo » ne se trouvent à aucune bibliothèque publique de Copenhague, mais j'ai obtenu aujourd'hui vos thèses.*
>
> *Je suis heureux maintenant de pouvoir citer votre mémoire en reconnaissant votre priorité. Le mémoire dont j'ai eu l'honneur de vous envoyer un tirage à part, ne paraîtra que dans le tome 34 des Acta Mathematica en 1911 [...]*

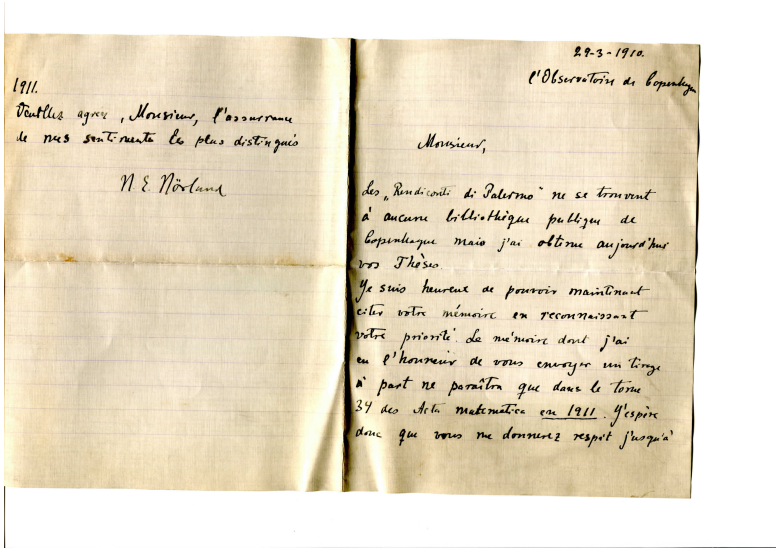
Il s'agit de *Fractions continues et différences réciproques* , un mémoire de plus de cent pages.

Le second facteur est que Robert de Montessus, lui-même, agrandit le cercle de réception de son résultat. Ainsi en 1905, après la soutenance de sa thèse, Robert de Montessus écrit à Mittag-Leffler [60] (1846-1927). C'est en 1909 que ses résultats sur les fractions continues paraîtront dans Acta

58. On peut donner quelques éléments quantitatifs sur les travaux des deux auteurs dans le domaine des fractions continues. Henri Padé a publié 28 articles sur la période 1890-1907 (Claude Brezinski dans [9] recense 42 articles en mathématiques) tandis que Robert de Montessus publie 9 articles sur les fractions continues algébriques entre 1902 et 1909 (Robert de Montessus a publié 57 articles, mais aussi 13 livres et plusieurs articles dans des revues comme *L'intermédiaire des mathématiciens* (fondé par C.A. Laisant), *L'enseignement mathématique* (fondé par C.A Laisant et H. Fehr), *La revue du mois* (fondé par E. Borel et sa femme, l'écrivain Camille Marbo, fille de P. Appell)). Robert de Montessus a essentiellement travaillé sur le problème de la convergence tandis que Padé s'est plus intéressé à la construction de ses approximants et aux méthodes de calculs pour les obtenir. A partir de 1908, Padé va occuper différents postes de recteur. Il arrête alors ses travaux de recherches.

59. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettre de N.E. Nörlund du 29/3/1910.

60. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettre de Mittag-Leffler du 30/12/1905. Robert de Montessus a noté sur la lettre *mémoire non envoyé.*



1911.
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance
de mes sentiments les plus distingués
N. E. Nörlund

29-3-1910.
l'Observatoire de Copenhague

Monsieur,

Les „Rendiconti di Palermo" ne se trouvent
à aucune bibliothèque publique de
Copenhague mais j'ai obtenu aujourd'hui
vos Thèses.
Je suis heureux de pouvoir maintenant
citer votre mémoire en reconnaissant
votre priorité. Le mémoire dont j'ai
eu l'honneur de vous envoyer un tirage
à part ne paraîtra que dans le Tome
34 des Acta mathematica en 1911. J'espère
donc que vous me donnerez respit jusqu'à

FIGURE 9 – lettre de Nörlund du 29/3/1910

Mathematica, journal dirigé par Mittag-Leffler. La thèse de Robert de Montessus est elle aussi publiée dans une revue internationale, les Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, en 1905.

Le troisième facteur est l'obtention d'une partie du Grand Prix de l'Académie des Sciences de 1906 [61] qui a certainement assuré à Robert de Montessus une plus grande diffusion de son résultat.

Le tableau (1) ci-dessous donne les articles qui comportent une référence au théorème de Robert de Montessus. On y retrouve mentionné l'article déjà cité de Nörlund. Quant à l'ouvrage de Oskar Perron (1880-1975), qui sera réédité à plusieurs reprises après la Première Guerre mondiale, il s'agit évidemment de la première édition.

Entre les deux guerres

Le théorème de Robert de Montessus est de nouveau cité après la première guerre mondiale. Plusieurs auteurs anglais ou américains s'intéressent à ce théorème. Par exemple, le mathématicien anglais R. Wilson (1895-1980) correspond avec Robert de Montessus en 1923 [62] :

> (19/10/1923) *I am interested in the developement of M. Padé's work on the representation of a function by means of a continued fractions, and find that you have contributed much recent to this subject [...]*

et

> (31/10/1923) *Your important work on the continued fractions, and the singularities of this function, is special interest to me [...]*

61. Le Grand Prix de 1906 correspond en fait à une remise en jeu d'un Grand Prix proposé en 1904.
62. Recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettres de Wilson des 19/10/1923 et 31/10/1923.

année	auteur	titre	éditeur
1903	Van Vleck E.B.	Selected topics in the theory of divergent series and of continued fractions.	Lectures on mathematics, AMS
1907	Padé H.	Sur la généralisation des formules de Sylvester relatives aux fonctions qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm, et sur la convergence des réduites d'une fraction rationnelle.	Annales scientifiques de l'ENS, 3 ième série, tome 24, 1907, p 519-534.
1910	Watson G. N.	The solution of a certain transcendental equation.	[J] Lond. M. S. Proc. (2) 8, 162-177.
1911	Nörlund, N. E.	Fractions continues et différences réciproques.	Acta Math. 34, 1-108.
1913	Perron O.	Die Lehre von den Kettenbruchen	Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B.G. Teubner.

TABLE 1 – Auteurs citant le théorème, années 1903-1913

Le cas de Walsh [63] est remarquable. Ce mathématicien américain fait référence au théorème dans un ouvrage de l'A.M.S paru en 1935 puis au cours des années soixante dans une série d'articles [64].

Le tableau (2) ci-dessous donne les articles de la période 1924-1940, qui comportent une référence au théorème de Robert de Montessus. En 1924, Nörlund cite de nouveau le théorème de Robert de Montessus. C'est le cas aussi, naturellement, de Perron dans la seconde édition de son ouvrage sur les fractions continues.

Conclusion

Au terme de cette étude, il apparaît que le résultat de Robert de Montessus s'inscrit dans une dynamique de recherches menées par différents mathématiciens depuis le milieu du XIX ème siècle sur la question de la convergence des fractions continues algébriques. Nous avons vu aussi comment cette

63. J.L. Walsh est à Paris en 1920-1921 où il travaille avec Paul Montel (1876-1975). Il soutient sa thèse en 1927 sous la direction de Maxime Bôcher (1867-1918). Maxime Bôcher a séjourné quant à lui à Paris durant l'année universitaire 1913-1914 dans le cadre d'un échange entre les universités de Harvard et Paris. Maxime Bôcher a eu pour directeur de thèse F. Klein. Notons que E.B. Van Vleck, que nous avons évoqué à plusieurs reprises, soutient lui aussi une thèse en 1893 sous la direction de F. Klein. Van Vleck encadre la thèse de H.S. Wall (1902-1971) en 1927. Ce dernier fait à son tour mention du théorème de Robert de Montessus de Ballore.

64. Précisément, en 1964, 1965 et 1967.

année	auteur	titre	éditeur
1924	Nörlund N. E.	Vorlesungen uber Differenzenrechnung	Berlin Verlag von Julius Springer
1927	Wilson R.	Divergent continued fractions and polar singularities	Proceedings L. M. S. (2) 26, 159-168.
1928	Wilson R.	Divergent continued fractions and polar singularities	Proceedings L. M. S. (2) 27, 497-512 ; (2) 28, 128-144.
1929	Perron O.	Die Lehre von den Kettenbruchen	Second edition, revised. Leipzig and Berlin, Teubner.
1935	Walsh J.L.	Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain	New York, American Mathematical Society (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. XX).
1939	Scott W.T., Wall H.S.	Continued Fractions	National Mathematics Magazine, Vol. 13, No. 7, pp. 305-322.
1940	Mall J.	Beitrag zur Theorie der mehrdimensionalen Padéschen Tafel	[J] Math. Z. 46, 337-349.

TABLE 2 – Auteurs citant le théorème, années 1924-1940

question est liée au thème du prolongement analytique et à d'autres domaines de l'Analyse comme la sommation de séries divergentes ou le problème des moments. On peut dire que dans son article de 1902 Robert de Montessus fait une synthèse des travaux de Padé sur le lien entre série de Taylor, fractions continues et *fractions approchées* et ceux de Hadamard sur les singularités polaires. C'est ce qui fait la force de ce travail, rapidement diffusé. Donnons l'avis de Paul Appell, même s'il s'agit d'une lettre de recommandation [65] :

> *Les travaux de M. de Montessus sur les fractions continues algébriques sont de premier ordre : c'est non seulement mon avis personnel, mais celui de mes collègues de l'Académie des Sciences, notamment MM. Poincaré et E. Picard. La théorie des fractions continues algébriques a fait de grands progrès en France depuis une vingtaine d'années ; le regretté Laguerre s'en est occupé avec des idées tout à fait neuves ; M. Padé actuellement doyen de la Faculté des Sciences de Bordeaux a, dans une thèse très remarquable, posé les principes généraux de la théorie. M. de Montessus a continué et étendu ces recherches en traitant la question difficile du domaine de convergence. L'Académie des Sciences vient de couronner*

65. Lettre de recommandation écrite par Paul Appell en 1907 suite à la candidature de Robert de Montessus à un poste à l'Université de Fribourg en Suisse, recueil de lettres reçues par Robert de Montessus de Ballore, période 1897-1937, lettre de Paul Appell du 4/6/1907.

ses travaux qui se rattachent aux questions les plus profondes de l'Analyse moderne.

La diffusion s'est faite de plusieurs façons : par des démarches de l'auteur pour des publications dans des revues internationales[66] ; grâce à des échanges dans la communauté mathématique, sur un sujet particulièrement important à l'époque.

Nous ne savons pas pourquoi Robert de Montessus s'est arrêté dès 1909 de publier sur les fractions continues algébriques et s'il a même poursuivi des travaux dans ce domaine. D'après sa bibliographie, il se tourne vers des sujets de Géométrie à partir de l'année 1912, puis résolument vers les statistiques après la Première Guerre mondiale.

Après la Seconde Guerre mondiale, le résultat de Robert de Montessus sort du cadre des fractions continues pour rentrer dans celui de l'interpolation et l'approximation, deux notions qui se mêlent. L'américain J. L. Walsh, qui écrit aussi en français et en allemand, joue un rôle prépondérant dans la diffusion du résultat de Robert de Montessus. C'est aussi après la Seconde Guerre mondiale, que le nom Montessus de Ballore sert à nommer différents résultats apparentés à celui de 1902. Robert de Montessus de Ballore passe à la postérité.

Références

[1] Registre AJ/16/5514, Procès verbaux d'examens, Doctorats d'état, du 1/11/1895 au 11/11/1907, numéro d'ordre 1187, Archives Nationales, CRAN, Paris.

[2] Registre AJ/16/5538, rapports de thèses Faculté des Sciences de Paris, Archives Nationales, CRAN, Paris.

[3] Appell P., Sur les fractions continues périodiques, Archiv der Mathematik und Physik, 1877.

[4] Appell P., Notice sur les travaux scientifiques de M. Paul Appell, Gauthier-Villars, 1892.

[5] Bachelier Louis, Théorie de la spéculation Annales scientifiques de l'ENS, 3e série, tome 17 (1900), p. 21-86.

[6] Baker G.A., Graves-Morris P., Padé Approximants, Cambridge University Press, 1996.

[7] Borel E., Leçons sur séries divergentes, Gauthier-Villars, Paris, 1901.

[8] Borel, E., Leçons sur les séries divergentes. 2. éd. revue et entièrement remaniée avec le concours de G. Bouligand, Paris : Gauthier-Villars. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions). IV, 260 p. (1928).

[9] Brezinski Claude, H. Padé, Oeuvres, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1984.

[10] Brezinski Claude, History of continued fractions and Padé approximants, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[11] Cuyt A., Lubinsky D.S., *A de Montessus theorem for multivariate homogeneous Padé approximants.*, Annals of numerical mathematics 4 (1997), pp 217-228.

[12] J Dieudonné, Fractions continuées et polynômes orthogonaux dans l'oeuvre de E. N. Laguerre in : Polynomes orthogonaux et applications, C. Brezinski, A. Draux, A.-P. Magnus, P. Maroni, Lectures Notes in Mathematics, 1171,pp 1-15, Springer-Verlag, 1985

66. Hélène Gispert ([13] pp 154-155) indique que la plupart des mathématiciens français, à l'exception notoire de Henri Poincaré, ne publiait pas dans des revues étrangères.

[13] Gispert H., La France mathématique, La société mathématique de France (1870-1914), Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, numéro 34, 1991.

[14] Goldstein C., Un théorème de Fermat et ses lecteurs, collection Histoire des Sciences, Presses Universitaire de Vincennes, 1995.

[15] Gutknecht M.H., Parlett B.N., From QD to LR and QR, or, how were the QD and LR algorithms discovered ? , IMA J Numer Anal (2011) 31(3) : 741-754.

[16] Hadamard J., Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, JMPA, 8, pp 101-186, 1892.

[17] Hadamard J., La série de Taylor et son prolongement analytique, Scienta Phys. Math., 12, 1901.

[18] Henrici P., Applied and computational complex analysis, volume I, John Wiley and sons, New York, 1988.

[19] Henrici P., Applied and computational complex analysis, volume II, John Wiley and sons, New York, 1991.

[20] Huygens C., Oeuvres complètes. Tome XXI. Cosmologie (ed. J.A. Vollgraff). Martinus Nijhoff, Den Haag 1944.

[21] Jones W.B., Thron W.J., Continued Fractions, Analytic theory and applications, Encyclopedia of mathematics ans its applications, Addison-Wesley, 1980.

[22] Von Koch H., Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues, Bulletin de la S.M.F., tome 23, pp 33-40, 1895.

[23] Laguerre E., Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$, Bulletin de la SMF, tome 8, pp 36-52, 1880.

[24] Laguerre E., Oeuvres complètes, volume 1, sous la direction de C. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Gauthier-Villars, 1898.

[25] Laguerre E., Oeuvres complètes, volume 2, sous la direction de C. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Gauthier-Villars, 1905.

[26] Le Ferrand H., Notes sur la vie et l'oeuvre de Robert de Montessus de Ballore 1870-1937, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00544743, 2010.

[27] Legendre A. M., Eléments de Géométrie, avec notes, suivi d'un traité de Trigonométrie, Langlet et Compagnie, Libraires, Bruxelles, 1837.

[28] Leloup J., L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2009.

[29] Mas'ya V., Shaposhnikova T., Jacques Hadamard, un mathématicien universel, EDP Sciences, 2005.

[30] Mazliak L., Sage M., Au delà des réels Borel et l'approche probabiliste de la réalité, http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00712342

[31] de Montessus de Ballore Robert, Sur les fractions continues algébriques, Comptes Rendus 134 (1902), 1489-1491.

[32] de Montessus de Ballore Robert, Sur les fractions continues algébriques, Bulletin de la SMF, tome 30 (1902), p 28-36.

[33] de Montessus de Ballore Robert, Sur les fractions continues algébriques (extrait d'une lettre adressée à la rédaction), Annales Scientifique de l'ENS, 3ième série, tome 25, 1908, p 195-197

[34] de Montessus de Ballore Robert, Les fractions continues algébriques, Acta Mathematica, 32, pp 257-281, 1909.

[35] de Montessus de Ballore Robert, Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1908.

[36] de Montessus de Ballore Robert, notice parue dans le Journal de Mathématiques pures et Appliquées, tome 16, 1937

[37] Padé H., Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles, Gauthier-Villars, Paris 1892.

[38] Padé H., Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 24, pp 341-400, 1907.

[39] Perron O. *Die Lehre von den Kettenbruchen*,Teubner, Stuttgart (édition de) 1957.

[40] Pincherle S., Notice sur les travaux Acta Mathematica, Vol. 46 (1925), p. 341-362.

[41] Poincaré H., Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies, Journal de l'Ecole Polytechnique, tome 28, cahier 47, pp 177-245, 1880.

[42] Poincaré H., Sur une généralisation des fractions continues, C.R. Acad. Sci., Paris, 99, (1884), 1014-1016.

[43] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villars, Paris, tome 1,2 et 3, 1892, 1893 et 1899.

[44] Histoire des mathématiques par W W Rouse Ball ; édition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L Freund, Ball, Walter William Rouse. Auteur ; Montessus de Ballore, Robert ; éditeur scientifique ; L Freund, Traduction, Hermann, 1906-1907. -2 vol. (VII-422 p., 271 p.).

[45] E. B. Saff, An extansion of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions, Journal of Approximation Theory, vol 6, No. 1, July 1972.

[46] H. Sinaceur, Corps et modèles, Mathesis, Vrin, 1991.

[47] Thomé, L. W., Ueber die Kettenbruchentwicklung des Gaussschen Quotienten $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$,Reine Angew. Math. 67, 299-309, 1867.

[48] Edward Burr Van Vleck, 1863-1943, A Biographical Memoir by Rudolph E. Langer and Mark H. Ingraham, 1957, National Academy of Sciences Washington d.c.

[49] Van Vleck E.B., *Selected topics in the theory of divergent series and of continued fractions.*, in Lectures on mathematics deivered from September 2 to 5, 1903, before members of the american mathematical society in connexion with the summer meeting hed at the MIT Boston, mass., published for the american mathematical society by the Macmillan company London, 1905.

[50] V. S. Varadarajan, Euler and his work on infinite series, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 44, Number 4, October 2007, Pages 515-539