



**HAL**  
open science

## Jointure G 2 de deux courbes par une courbe de Bézier rationnelle à points massiques de contrôle

Lionel Garnier, Jean-Paul Becar, Laurent Fuchs

### ► To cite this version:

Lionel Garnier, Jean-Paul Becar, Laurent Fuchs. Jointure G 2 de deux courbes par une courbe de Bézier rationnelle à points massiques de contrôle. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique 2023 ( GTMG 2023), Mar 2023, Strasbourg, France. hal-04051026

**HAL Id: hal-04051026**

**<https://u-bourgogne.hal.science/hal-04051026v1>**

Submitted on 29 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Jointure $G^2$ de deux courbes par une courbe de Bézier rationnelle à points massiques de contrôle

Lionel Garnier<sup>1</sup>, Jean-Paul Bécar<sup>2</sup> et Laurent Fuchs<sup>3</sup>

lgarnier@u-bourgogne.fr (Lionel Garnier)

jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr (Jean-Paul Bécar)

Laurent.Fuchs@univ-poitiers.fr (Laurent Fuchs)

<sup>1</sup> Laboratoire Informatique de Bourgogne, Université de Bourgogne, 21000 Dijon

<sup>2</sup> Université de Valenciennes, LAMAV-CGAO, UMR CNRS 2956, 59313 Valenciennes

<sup>3</sup> IXLIM-SIC, UMR CNRS 7252, Université de Poitiers, SP2MI, 86962 Futuroscope Chasseneuil

---

## Résumé

*Cet article s'intéresse aux jointures entre deux courbes données par une courbe de Bézier rationnelle quintique à points massiques de contrôle. Pour ce faire, les propriétés différentielles de ces courbes de Bézier fournissent les formules de calcul des courbures en 0 et 1 ainsi que le cercle osculateur idoine. Chaque jointure présente deux degrés de liberté où deux points appartiennent chacun à une droite. Si la jointure  $G^2$  est aussi une jointure  $C^2$  alors la solution est unique. Après le cas d'école d'une jointure entre un cercle et une droite et en guise d'illustration des résultats, deux exemples de jointures entre les boucles d'un Folium de Descartes et d'une Lemniscate de Bernouilli sont présentés aux lecteurs.*

---

**Mots-clés :** Courbe de Bézier, points massiques, courbure, cercle osculateur, jointures

## 1. Introduction

Les courbes de Bézier sont les courbes à points de contrôle le plus simple et ont été inventées par Pierre Bézier [Béz86] chez Renault et Paul de Faget de Casteljau [Cas85] chez Citroën. Ces courbes sont le lieu barycentrique de points pondérés [Far92, Far99, PT89]. Se pose alors le problème de l'existence de ces barycentres lorsque la somme des poids s'annule [Gou83, Lad02, Lad03] puisque dans ce cas, le barycentre n'existe plus et le résultat donne un vecteur. La solution qui généralise la notion de barycentre consiste à utiliser des points massiques [FJ89, FJ92]. En utilisant ce concept, à l'aide de changement de paramètre homographique, il est possible de déterminer les propriétés des coniques propres [Béc97, GB16, BG14] ce qui est impossible en utilisant le concept de géométrie projective [PT95]. De plus, cette modélisation étant indépendante de la structure métrique ou pseudo-métrique, il est possible de l'utiliser dans l'espace de Minkowski-Lorentz [LSD\*14, DLG13, GB17, GBD\*19, GBD\*20] pour représenter des surfaces canal [GBD17, GBMF15]. Il est possible

aussi, via ce modèle, de construire des cyclides de Dupin en tant que surfaces de subdivisions [GDB\*21b, GDB\*21a]. Dans cet article, nous nous focalisons sur la jointure  $G^2$  entre deux courbes par une courbe de Bézier rationnelle quintique à points massiques de contrôle..

Dans le paragraphe 2, nous faisons un rappel sur les points massiques et les courbes de Bézier à points massiques de contrôle. Dans le paragraphe 3, nous faisons un rappel sur les types de jointure. Dans le paragraphe 4, nous faisons un rappel sur les propriétés différentielles, vecteurs tangents et courbures, des courbes de Bézier rationnelles à points massiques de contrôle aux extrémités i.e. en 0 et en 1. Avant de conclure et de donner des perspectives, dans le paragraphe 5, nous donnons les méthodes pour réaliser une jointure  $G^2$  entre deux courbes par une courbe de Bézier à points massiques de contrôle. Nous donnons deux exemples de jointure (une  $G^2$  et  $C^1$  et l'autre  $G^2$  et  $C^1$ ) entre une boucle d'une Lemniscate de Bernouilli et une boucle d'un Folium de Descartes.

## 2. Ensemble des points massiques

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans les plans vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  et affine  $\mathcal{P}$ , ceux-ci peuvent être remplacés par tout

espace affine  $\mathcal{E}$  de dimension  $n$ ,  $n \in \mathbf{N}^* - \{1, 2\}$ , d'espace vectoriel attaché  $\vec{\mathcal{E}}$ . Le plan affine est muni du repère ortho-normé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## 2.1. Définition

L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  et des points pondérés du plan affine  $\mathcal{P}$  sont regroupés dans l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$  défini par :

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \times \mathbf{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{P}} \times \{0\}) \quad (1)$$

et il est possible d'identifier  $\tilde{\mathcal{P}}$  à  $\tilde{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}} \oplus \vec{\mathbf{R}}$ . L'idée est de considérer le plan affine  $\mathcal{P}$  comme un hyperplan de  $\tilde{\mathcal{P}}$  d'équation  $\omega = 1$  : la coordonnée supplémentaire représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré du plan  $\mathcal{P}$ , soit un vecteur du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  à qui nous affectons un poids nul.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés dont la somme des poids est nul n'est pas un point, mais le vecteur :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA_i}$$

qui est indépendant du point  $M$ . Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de  $\mathcal{P}$  et les vecteurs de  $\vec{\mathcal{P}}$ , identifié à l'hyperplan de  $\tilde{\mathcal{P}}$  d'équation  $\omega = 0$ . Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle.

Afin de pouvoir manipuler, de façon très simple et très pédagogique, les coordonnées des points ou des vecteurs, nous définissons l'opération d'addition en utilisant que des concepts faisant intervenir des transformations affines ou vectorielles planes. Ainsi, l'addition sur l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$ , notée  $\oplus$ , est définie de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0$  implique :

$$\begin{aligned} (M; \omega) \oplus (N; \mu) &= (M; \omega) \oplus (N; -\omega) \\ &= (\omega \overrightarrow{NM}; 0) \end{aligned}$$

- $(M; \omega) \oplus (M; -\omega) = (\omega \overrightarrow{MM}; 0) = (\vec{0}; 0)$
- $\omega + \mu \neq 0$  implique :

$$(M; \omega) \oplus (N; \mu) = \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right)$$

- $(\vec{u}; 0) \oplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$
- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0) = \left( \mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \omega \right)$  où  $\mathcal{T}_{\vec{u}}$  est la translation de  $\mathcal{P}$  de vecteur  $\vec{u}$ .

Remarquons que le barycentre des points pondérés  $(M; \omega)$

et  $(N; \mu)$ , avec la condition  $\omega + \mu \neq 0$ , s'exprime très facilement en utilisant la translation :

$$\begin{aligned} (M; \omega) \oplus (N; \mu) &= \\ (M; \omega + \mu) \oplus (M; -\mu) \oplus (N; \mu) &= \\ (M; \omega + \mu) \oplus (\mu \overrightarrow{MN}; 0) &= \quad (2) \\ \left( \mathcal{T}_{\frac{\mu}{\omega + \mu} \overrightarrow{MN}}(M); \omega + \mu \right) & \end{aligned}$$

et si  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\omega$  sont trois nombres non nuls, nous avons :

$$(M; \alpha \omega) \oplus (\alpha \vec{u}; 0) = \left( \mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \alpha \omega \right) \quad (3)$$

d'une part et :

$$(M; \alpha \omega) \oplus (N; \alpha \mu) = \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \alpha (\omega + \mu) \right) \quad (4)$$

d'autre part. De plus, si  $\omega + \mu \neq 0$ , alors, nous avons :

$$(M; \omega) \oplus (M; \mu) = (M; \omega + \mu) \quad (5)$$

Sur l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$ , nous définissons la multiplication par un scalaire, notée  $\odot$ , de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \implies \alpha \odot (M; \omega) = (M; \alpha \omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \odot (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$
- $\alpha \odot (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

Notons que la multiplication  $\alpha \odot (M; \omega)$  permet d'exhiber la différence profonde entre l'ensemble des points massiques et l'utilisation des coordonnées homogènes dans le cadre de la géométrie projective. De plus, la formule (3) peut s'écrire :

$$(M; \alpha \omega) \oplus (\alpha \vec{u}; 0) = \alpha \odot ((M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0)) \quad (6)$$

## 2.2. Courbes de Bézier rationnelles dans $\tilde{\mathcal{P}}$

Pour tout entier  $n$  non nul,  $B_{i,n}(t)$  désigne le  $1 + i$ -ème polynôme de Bernstein.

### Définition 1 (Courbe de Bézier rationnelle)

Soit  $(P_i; \omega_i)_{i \in [0; n]}$   $n + 1$  points massiques de  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Soit  $I$  l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls.

Soit  $J$  l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids nuls.

Soit la fonction  $\omega_f$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i \times B_{i,n}(t)$$

Un point massique  $(M; \omega)$  ou  $(\vec{u}; 0)$  appartient à la courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_i; \omega_i)_{i \in [0; n]}$ , notée  $BR \left\{ (P_i; \omega_i)_{i \in [0; n]} \right\}$ , s'il existe un réel  $t_0$  de  $[0; 1]$  tel que :

- si  $\omega_f(t_0) \neq 0$  alors, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_{i,n}(t_0) \overrightarrow{OP_i} \\ \quad + \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_{i,n}(t_0) \overrightarrow{P_i} \\ \omega = \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (7)$$

- si  $\omega_f(t_0) = 0$  alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \sum_{i \in I} \omega_i B_{i,n}(t_0) \overrightarrow{OP_i} \\ &+ \sum_{i \in J} B_{i,n}(t_0) \overrightarrow{P_i} \end{aligned} \quad (8)$$

L'ensemble  $I$  est toujours non vide. Si  $J$  l'est aussi, nous avons une partie affine  $\left(\overrightarrow{OP_i}\right)_{i \in I}$  et une partie vectorielle  $\left(\overrightarrow{P_i}\right)_{i \in J}$ .

Soit la fonction :

$$\chi: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^* \\ 0 & \longmapsto & 1 \\ t & \longmapsto & t \end{array} \quad (9)$$

En posant  $\widetilde{P}_k = \overrightarrow{OP_k}$  si  $\omega_k \neq 0$  et  $\widetilde{P}_k = \overrightarrow{P_k}$  si  $\omega_k = 0$ , l'équation (7) s'écrit :

$$\widetilde{M} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \omega_k B_{k,n}(t)} \sum_{k=0}^n \chi(\omega_k) B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \quad (10)$$

où  $\widetilde{M}$  est un point massique avec  $\widetilde{M} = \overrightarrow{OM}$  si  $\sum_{k=0}^n \omega_k B_{k,n}(t) \neq 0$  et  $\widetilde{M} = \vec{M}$  dans le cas contraire.

### 3. Courbures et jointures géométriques

#### Définition 2 (Courbure d'une courbe) :

Soit  $\gamma$  une courbe plane définie par une paramétrisation régulière  $\gamma$  de classe au moins  $\mathcal{C}^2$ .

La courbure  $\rho(t_0)$  ou  $\dagger$   $\rho_\gamma(t_0)$  à la courbe  $\gamma$  en un point  $\gamma(t_0)$  est définie par :

$$\rho(t_0) = \frac{\left| \det \left( \frac{d\vec{\gamma}}{dt}(t_0); \frac{d^2\vec{\gamma}}{dt^2}(t_0) \right) \right|}{\left\| \frac{d\vec{\gamma}}{dt}(t_0) \right\|^3} \quad (11)$$

Le **cercle osculateur** à une courbe  $\gamma$ , en un point  $M_0$  où la courbure n'est pas nulle, est le cercle qui approxime [Lad02, BG92] le mieux l'arc de courbe au voisinage du point  $M_0$  et c'est le seul cercle tangent à  $\gamma$  en  $M_0$  qui a au moins trois points communs avec  $\gamma$ . Le **rayon de courbure**  $R(t_0)$  de ce cercle est l'inverse de la courbure  $\rho(t_0)$  à la courbe en ce point et est donné par :

$$R(t_0) = \frac{1}{\rho(t_0)} \quad (12)$$

Si la courbure  $\rho(t_0)$  est nulle, le rayon de courbure  $R(t_0)$  est infini c'est-à-dire que le centre du cercle osculateur est rejeté à l'infini [Aud06]. Si  $\frac{d^2\vec{\gamma}}{dt^2}(t_0)$  n'est pas colinéaire à  $\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(t_0)$ , le **centre de courbure**  $\Omega(t_0)$  du cercle osculateur en  $M_0$  est déterminé par :

$$\overrightarrow{M_0\Omega(t_0)} = R(t_0) \overrightarrow{n^p}(t_0) \quad (13)$$

où  $\overrightarrow{n^p}(t_0)$  ou  $\dagger$   $\overrightarrow{n_\gamma^p}(t_0)$  est le **vecteur normal principal** à  $\gamma$  au point  $\gamma(t_0)$  c'est-à-dire le vecteur normal et unitaire vérifiant :

$$\overrightarrow{n^p}(t_0) \bullet \frac{d^2\vec{\gamma}}{dt^2}(t_0) > 0 \quad (14)$$

#### Définition 3 (Jointure géométrique)

Soit  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  deux courbes planes définies respectivement sur  $[a; b]$  et  $[c; d]$ .

La jointure géométrique entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  est :

- $G^0$  si  $\gamma_0(b) = \gamma_1(c)$ ;
- $G^1$  si  $\gamma_0(b) = \gamma_1(c)$  et  $\frac{d\vec{\gamma}_0}{dt}(b)$  et  $\frac{d\vec{\gamma}_1}{dt}(c)$  sont non nuls et colinéaires c'est-à-dire que les tangentes sont les mêmes au point de contact;
- $G^2$  si la jointure est  $G^1$  est  $\rho_{\gamma_0}(b) = \rho_{\gamma_1}(c)$  et  $\overrightarrow{n_{\gamma_0}^p}(b) = \overrightarrow{n_{\gamma_1}^p}(c)$  c'est-à-dire que les cercles osculateurs sont les mêmes au point de contact.

Finissons ce paragraphe par un exemple expliquant la différence entre une jointure  $G^1$  et une jointure  $\mathcal{C}^1$ . Considérons les segments de droites compris entre les points  $A(-1; 1)$  et  $O$  d'une part et  $O$  et  $B(1; 1)$  d'autre part. L'union de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction valeur absolue sur  $[-1; 1]$  et la tangente à la courbe représentative de cette fonction 0 n'existe pas : la jointure entre ces deux segments n'est pas  $G^1$ . Une représentation paramétrique du segment  $[AO]$  est donnée par :

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

<sup>†</sup>. Cas où plusieurs courbes sont mises en jeu.

<sup>‡</sup>. Cas où plusieurs courbes sont mises en jeu.

où  $t \in [-1; 0]$ . Une représentation paramétrique du segment  $[OB]$  est donnée par :

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

où  $t \in [0; 1]$ . Nous avons :

$$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -3t^2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

et :

$$\vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix} \quad (18)$$

Ainsi, nous avons :

$$\vec{\gamma}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\gamma}_2(0)$$

La jointure entre les courbes  $\gamma_1$ , définissant le segment  $[AO]$ , et  $\gamma_2$ , définissant le segment  $[OB]$  est  $C^1$  et s'effectue sur un point stationnaire.

#### 4. Propriétés différentielles des courbes de Bézier en 0 et 1

**Lemme 1 :**

Soit  $\gamma$  une courbe définie par  $\overrightarrow{O\gamma}(t) = \frac{1}{d(t)} \overrightarrow{n}(t)$ . Alors :

— le vecteur tangent est :

$$\frac{d\overrightarrow{O\gamma}}{dt}(t) = \frac{1}{d(t)} \frac{d\overrightarrow{n}(t)}{dt} - \frac{d'(t)}{(d(t))^2} \overrightarrow{n}(t) \quad (19)$$

— le vecteur accélération est :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\overrightarrow{O\gamma}}{dt^2}(t) \\ &= -\frac{d''(t)d(t) - 2(d'(t))^2}{(d(t))^3} \overrightarrow{n}(t) \\ & - 2\frac{d'(t)}{(d(t))^2} \frac{d\overrightarrow{n}}{dt}(t) + \frac{1}{d(t)} \frac{d^2\overrightarrow{n}}{dt^2}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

Démonstration :

— Evident

— Nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{d(t)} \frac{d\overrightarrow{n}}{dt}(t) \right) = \\ & -\frac{d'(t)}{(d(t))^2} \frac{d\overrightarrow{n}}{dt}(t) + \frac{1}{d(t)} \frac{d^2\overrightarrow{n}}{dt^2}(t) \end{aligned}$$

d'une part et :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{d'(t)}{(d(t))^2} \overrightarrow{n}(t) \right) \\ &= \frac{d'(t)}{(d(t))^2} \frac{d\overrightarrow{n}}{dt}(t) \\ & + \frac{d''(t)(d(t))^2 - 2(d'(t))^2 d(t)}{(d(t))^4} \overrightarrow{n}(t) \end{aligned}$$

d'autre part.

■

#### 4.1. Etude en $t = 0$

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3,  $\omega_0$  non nul. En posant  $\widetilde{P}_k = \overrightarrow{P_0 P_k}$  si  $\omega_k \neq 0$  et  $\widetilde{P}_k = \overrightarrow{P_k}$  si  $\omega_k = 0$ , l'équation (9) s'écrit :

$$\widetilde{M} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \omega_k B_{k,n}(t)} \sum_{k=1}^n \chi(\omega_k) B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \quad (21)$$

avec  $\widetilde{M} = \overrightarrow{P_0 \widetilde{M}}$  si  $\sum_{k=0}^n \omega_k B_{k,n}(t) \neq 0$  et  $\widetilde{M} = \overrightarrow{M}$  dans le cas contraire.

Nous avons :

**Théorème 1 (Vecteur vitesse en 0 à une courbe de Bézier de degré  $n$ )**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $\omega_0$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et ...

Deux cas sont à distinguer :

— si  $\omega_1 = 0$  et  $\overrightarrow{P_1}$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{O\gamma}(0) = \frac{n}{\omega_0} \overrightarrow{P_1} \quad (22)$$

— si  $\omega_1 \neq 0$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{O\gamma}(0) = n \frac{\omega_1}{\omega_0} \overrightarrow{P_0 P_1} \quad (23)$$

Démonstration :

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $\omega_0$  non nul. nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 n}(t) &= \chi(\omega_1) n t (1-t)^{n-1} \widetilde{P}_1 \\ &+ \sum_{k=2}^n \chi(\omega_k) B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \overrightarrow{P_0 n}(t) \\ &= \chi(\omega_1) n \left( (1-t)^{n-1} - t(n-1)(1-t)^{n-2} \right) \widetilde{P}_1 \\ &+ \sum_{k=2}^n \chi(\omega_i) \frac{d}{dt} B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_0 n}(0) = \vec{0} \\ \frac{d}{dt} \overrightarrow{P_0 n}(0) = n\chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 \end{cases}$$

Nous avons :

$$d(t) = \omega_0 (1-t)^n + \omega_1 n t (1-t)^{n-1} + \sum_{k=2}^n \omega_i B_{k,n}(t)$$

d'où :

$$\begin{aligned} d'(t) &= -\omega_0 n (1-t)^{n-1} \\ &+ \omega_1 n \left( (1-t)^{n-1} - (n-1)t(1-t)^{n-2} \right) \\ &+ \sum_{k=2}^n \omega_i \frac{d}{dt} B_{k,n}(t) \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} d(0) = \omega_0 \\ d'(0) = -\omega_0 n + n\omega_1 \end{cases}$$

En utilisant la formule (19), nous avons :

$$\frac{d\overrightarrow{P_0 \gamma}(0)}{dt} = \frac{1}{\omega_0} n\chi(\omega_1) \widetilde{P}_1$$

et deux cas sont à distinguer.

— si  $\omega_1 = 0$ . Alors  $\chi(\omega_1) = 1$  et nous obtenons :

$$\frac{d\overrightarrow{P_0 \gamma}(0)}{dt} = \frac{n}{\omega_0} \overrightarrow{P}_1$$

— si  $\omega_1 \neq 0$ . Alors  $\chi(\omega_1) = \omega_1$  et nous obtenons :

$$\frac{d\overrightarrow{P_0 \gamma}(0)}{dt} = \frac{n\omega_1}{\omega_0} \overrightarrow{P_0 P_1}$$

■

Nous avons :

### Théorème 2 ( Vecteur accélération en 0 à une courbe de Bézier de degré $n$ )

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $\omega_0$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$  et ...

Le vecteur accélération est :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) &= 2n \left( \frac{\omega_0 - n\omega_1}{\omega_0^2} \right) \chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 \\ &+ \frac{1}{\omega_0} n(n-1) \chi(\omega_2) \widetilde{P}_2 \end{aligned} \quad (24)$$

et quatre cas sont à distinguer :

— si  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) = \frac{2n}{\omega_0} \overrightarrow{P}_1 + n \frac{n-1}{\omega_0} \overrightarrow{P}_2 \quad (25)$$

— si  $\omega_1 \neq 0$  et  $\omega_2 = 0$ , le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) &= 2n \left( \frac{\omega_0 - n\omega_1}{\omega_0^2} \right) \omega_1 \overrightarrow{P_0 P_1} \\ &+ \frac{1}{\omega_0} n(n-1) \overrightarrow{P}_2 \end{aligned} \quad (26)$$

— si  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 \neq 0$ , le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) = \frac{2n}{\omega_0} \overrightarrow{P}_1 + \frac{\omega_2}{\omega_0} n(n-1) \overrightarrow{P_0 P_2} \quad (27)$$

— si  $\omega_1 \omega_2 \neq 0$  le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\begin{aligned} &= \frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) \\ &= 2n \left( \frac{\omega_0 - n\omega_1}{\omega_0^2} \right) \omega_1 \overrightarrow{P_0 P_1} \\ &+ \frac{\omega_2}{\omega_0} n(n-1) \overrightarrow{P_0 P_2} \end{aligned} \quad (28)$$

---

### Démonstration :

cf. annexe A

■

Il reste à calculer la courbure, et comme pour tous vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{v}_1$  et pour tous réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  nous avons :

$$\det(\alpha \vec{v}_0 + \beta \vec{v}_1; \lambda \vec{v}_1) = \alpha \lambda \det(\vec{v}_0; \vec{v}_1)$$

nous pouvons énoncer :

### Théorème 3 ( Courbure en 0 à une courbe de Bézier de degré $n$ )

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $\omega_0$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$  et ...

La courbure  $\rho(0)$  en 0 est :

$$\left| \frac{\omega_0 (n-1) \chi(\omega_2) \det \left( \frac{1}{\|\widetilde{P}_1\|} \widetilde{P}_1; \widetilde{P}_2 \right)}{n \chi(\omega_1)^2 \|\widetilde{P}_1\|^2} \right| \quad (29)$$

et quatre cas sont à distinguer :

— si  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , la courbure  $\rho(0)$  à la courbe en  $P_0$  est :

$$\left| \frac{\omega_0 (n-1) \det \left( \frac{1}{\|\vec{P}_1\|} \vec{P}_1; \vec{P}_2 \right)}{n \|\vec{P}_1\|^2} \right| \quad (30)$$

— si  $\omega_1 \neq 0$  et  $\omega_2 = 0$ , la courbure  $\rho(0)$  à la courbe en  $P_0$  est :

$$\left| \frac{\omega_0 (n-1) \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|} \overrightarrow{P_0 P_1}; \overrightarrow{P_2} \right)}{n \omega_1^2 \|\overrightarrow{P_0 P_1}\|^2} \right| \quad (31)$$

— si  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 \neq 0$ , la courbure  $\rho(0)$  à la courbe en  $P_0$  est :

$$\left| \frac{\omega_0 (n-1) \omega_2 \det \left( \frac{1}{\|\vec{P}_1\|} \vec{P}_1; \overrightarrow{P_0 P_2} \right)}{n \|\vec{P}_1\|^2} \right| \quad (32)$$

— si  $\omega_1 \omega_2 \neq 0$ , la courbure  $\rho(0)$  à la courbe en  $P_0$  est :

$$\left| \frac{\omega_0 (n-1) \omega_2 \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|} \overrightarrow{P_0 P_1}; \overrightarrow{P_0 P_2} \right)}{n \omega_1^2 \|\overrightarrow{P_0 P_1}\|^2} \right| \quad (33)$$

---

Démonstration :

La courbure est :

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \frac{\left| \frac{n^2}{\omega_0^2} (n-1) \chi(\omega_2) \chi(\omega_1) \det \left( \widetilde{P}_1; \widetilde{P}_2 \right) \right|}{\left| \frac{1}{\omega_0} n \chi(\omega_1) \right|^3 \|\widetilde{P}_1\|^3} \\ &= \left| \frac{\omega_0 (n-1) \chi(\omega_2) \det \left( \widetilde{P}_1; \widetilde{P}_2 \right)}{n \chi(\omega_1)^2 \|\widetilde{P}_1\|^3} \right| \end{aligned}$$

et il suffit de distinguer les quatre cas.

■

Trivialement, nous pouvons énoncer :

**Corollaire 1 ( Courbure nulle en 0 à une courbe de Bézier de degré  $n$  )**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $\omega_0$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$  et ...

La courbure en 0 est nulle si :

$$\det \left( \widetilde{P}_1; \widetilde{P}_2 \right) = 0 \quad (34)$$

et quatre cas sont à distinguer :

- si  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , les vecteurs  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  sont colinéaires.
- si  $\omega_1 \neq 0$  et  $\omega_2 = 0$ , le vecteur  $\vec{P}_2$  est un vecteur directeur de la droite  $(P_0 P_1)$ .
- si  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 \neq 0$ , le vecteur  $\vec{P}_1$  est un vecteur directeur de la droite  $(P_0 P_2)$ .
- si  $\omega_1 \omega_2 \neq 0$ , les points  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  sont alignés.

---

Démonstration :

$$\left| \frac{\omega_0 (n-1) \chi(\omega_2) \det \left( \widetilde{P}_1; \widetilde{P}_2 \right)}{n \chi(\omega_1)^2 \|\widetilde{P}_1\|^3} \right| = 0 \iff \det \left( \widetilde{P}_1; \widetilde{P}_2 \right) = 0$$

■

**4.2. Etude en  $t = 1$**

En posant  $\widetilde{P}_k = \overrightarrow{P_n P_k}$  si  $\omega_k \neq 0$  et  $\widetilde{P}_k = \vec{P}_k$  si  $\omega_k = 0$ , l'équation (9) s'écrit :

$$\widetilde{M} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi(\omega_k) B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \quad (35)$$

avec  $\tilde{M} = \overrightarrow{P_n M}$  si  $\sum_{k=0}^n \omega_k B_{k,n}(t) \neq 0$  et  $\tilde{M} = \overrightarrow{M}$  dans le cas contraire.

Etant donné les propriétés des courbes de Bézier et en particulier des polynômes de Bernstein, nous pouvons énoncer :

**Théorème 4 ( Vecteur vitesse en 1 à une courbe de Bézier de degré  $n$  )**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $\omega_n$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle ...,  $(P_{n-1}; \omega_{n-1})$  et  $(P_n; \omega_n)$ .

Deux cas sont à distinguer :

— si  $\omega_{n-1} = 0$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_n$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{O\gamma}(1) = -\frac{n}{\omega_n} \overrightarrow{P_{n-1}} \quad (36)$$

— si  $\omega_1 \neq 0$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{O\gamma}(1) = -n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \overrightarrow{P_n P_{n-1}} \quad (37)$$

De même, nous avons :

**Théorème 5 ( Vecteur accélération en 1 à une courbe de Bézier de degré  $n$  )**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $\omega_n$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle ...,  $(P_{n-2}; \omega_{n-2})$ ,  $(P_{n-1}; \omega_{n-1})$  et  $(P_n; \omega_n)$ .

Le vecteur accélération est :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \overrightarrow{P_n \gamma}}{dt^2}(1) \\ &= -2n \left( \frac{\omega_n - n\omega_{n-1}}{\omega_n^2} \right) \chi(\omega_{n-1}) \widetilde{P_{n-1}} \\ &+ \frac{1}{\omega_n} n(n-1) \chi(\omega_{n-2}) \widetilde{P_{n-2}} \end{aligned} \quad (38)$$

et quatre cas sont à distinguer :

— si  $\omega_{n-1} = \omega_{n-2} = 0$ , le vecteur accélération à la courbe en  $P_n$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_n \gamma}}{dt^2}(1) = \frac{2n}{\omega_n} \overrightarrow{P_{n-1}} + n \frac{n-1}{\omega_n} \overrightarrow{P_{n-2}} \quad (39)$$

— si  $\omega_1 \neq 0$  et  $\omega_2 = 0$ , le vecteur accélération à la courbe en  $P_n$  est :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \overrightarrow{P_n \gamma}}{dt^2}(1) \\ &= 2n \left( \frac{\omega_n - n\omega_{n-1}}{\omega_n^2} \right) \omega_{n-1} \overrightarrow{P_n P_{n-1}} \\ &+ \frac{1}{\omega_n} n(n-1) \overrightarrow{P_{n-2}} \end{aligned} \quad (40)$$

— si  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 \neq 0$ , le vecteur accélération à la courbe

en  $P_n$  est :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \overrightarrow{P_n \gamma}}{dt^2}(1) \\ &= \frac{2n}{\omega_n} \overrightarrow{P_{n-1}} \\ &+ \frac{\omega_{n-2}}{\omega_n} n(n-1) \overrightarrow{P_n P_{n-2}} \end{aligned} \quad (41)$$

— si  $\omega_{n-1} \omega_{n-2} \neq 0$  le vecteur accélération à la courbe en  $P_n$  est :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \overrightarrow{P_n \gamma}}{dt^2}(1) \\ &= 2n \left( \frac{\omega_n - n\omega_{n-1}}{\omega_n^2} \right) \omega_{n-1} \overrightarrow{P_n P_{n-1}} \\ &+ \frac{\omega_{n-2}}{\omega_n} n(n-1) \overrightarrow{P_n P_{n-2}} \end{aligned} \quad (42)$$

Nous pouvons énoncer :

**Théorème 6 ( Courbure en 1 à une courbe de Bézier de degré  $n$  )**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $\omega_n$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle ...,  $(P_{n-2}; \omega_{n-2})$ ,  $(P_{n-1}; \omega_{n-1})$  et  $(P_n; \omega_n)$ .

La courbure  $\rho(1)$  en 1 est :

$$\left| \frac{\omega_n (n-1) \chi(\omega_{n-2}) \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_{n-1}}\|} \widetilde{P_{n-1}}; \widetilde{P_{n-2}} \right)}{n \chi(\omega_{n-1})^2 \|\overrightarrow{P_{n-1}}\|^2} \right| \quad (43)$$

et quatre cas sont à distinguer :

— si  $\omega_{n-1} = \omega_{n-2} = 0$ , la courbure  $\rho(1)$  à la courbe en  $P_n$  est :

$$\left| \frac{\omega_n (n-1) \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_{n-1}}\|} \overrightarrow{P_{n-1}}; \overrightarrow{P_{n-2}} \right)}{n \|\overrightarrow{P_{n-1}}\|^2} \right| \quad (44)$$

— si  $\omega_{n-1} \neq 0$  et  $\omega_{n-2} = 0$ , la courbure  $\rho(1)$  à la courbe en  $P_n$  est :

$$\left| \frac{\omega_n (n-1) \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_n P_{n-1}}\|} \overrightarrow{P_n P_{n-1}}; \overrightarrow{P_{n-2}} \right)}{n \omega_{n-1}^2 \|\overrightarrow{P_n P_{n-1}}\|^2} \right| \quad (45)$$

— si  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 \neq 0$ , la courbure  $\rho(1)$  à la courbe en  $P_n$



est :

$$\left| \frac{\omega_n (n-1) \omega_2 \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_{n-1}}\|} \overrightarrow{P_{n-1}; P_n P_{n-2}} \right)}{n \|\overrightarrow{P_{n-1}}\|^2} \right| \quad (46)$$

— si  $\omega_{n-1} \omega_{n-2} \neq 0$ , la courbure  $\rho(1)$  à la courbe en  $P_n$  est :

$$\left| \frac{\omega_n (n-1) \omega_2 \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_n P_{n-1}}\|} \overrightarrow{P_n P_{n-1}; P_n P_{n-2}} \right)}{n \omega_{n-1}^2 \|\overrightarrow{P_n P_{n-1}}\|^2} \right| \quad (47)$$

Trivialement, nous pouvons énoncer :

**Corollaire 2 ( Courbure nulle en 1 à une courbe de Bézier de degré  $n$  )**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Soit  $\omega_0$  un réel non nul. Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de points massiques de contrôle ...,  $(P_{n-2}; \omega_{n-2})$ ,  $(P_{n-1}; \omega_{n-1})$  et  $(P_n; \omega_n)$ .

La courbure en 0 est nulle si :

$$\det \left( \widetilde{P_{n-1}; P_{n-2}} \right) = 0 \quad (48)$$

et quatre cas sont à distinguer :

- si  $\omega_{n-1} = \omega_{n-2} = 0$ , les vecteurs  $\overrightarrow{P_{n-1}}$  et  $\overrightarrow{P_{n-2}}$  sont colinéaires.
- si  $\omega_{n-1} \neq 0$  et  $\omega_{n-2} = 0$ , le vecteur  $\overrightarrow{P_{n-2}}$  est un vecteur directeur de la droite  $(P_n P_{n-1})$ .
- si  $\omega_{n-1} = 0$  et  $\omega_{n-2} \neq 0$ , le vecteur  $\overrightarrow{P_{n-1}}$  est un vecteur directeur de la droite  $(P_n P_{n-2})$ .
- si  $\omega_{n-1} \omega_{n-2} \neq 0$ , les points  $P_n$ ,  $P_{n-1}$  et  $P_{n-2}$  sont alignés.

Démonstration :

$$\left| \frac{\omega_n (n-1) \chi(\omega_{n-2}) \det \left( \widetilde{P_{n-1}; P_{n-2}} \right)}{n \chi(\omega_{n-1})^2 \|\overrightarrow{P_{n-1}}\|^3} \right| = 0 \iff \det \left( \widetilde{P_{n-1}; P_{n-2}} \right) = 0$$

■

**5. Jointure  $G^2$  entre deux courbes par une courbe de Bézier de degré  $n$**

**Notation 1 :**

$\text{Aff} \{A; B\}$  désigne la droite affine passant par les points  $A$  et  $B$ .

$\text{Aff} \{A; \vec{u}\}$  désigne la droite affine passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .

**5.1. Préambule**

Commençons par la construction de ligne de niveau via un déterminant.

**Proposition 1 (Droite définie comme ligne de niveau d'un déterminant) :**

Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points distincts et  $\varrho$  un nombre réel et  $\vec{v}$  un vecteur non nul.

1. Soit  $\vec{v}_1 = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB}$  ou  $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ .
2. Soit  $\vec{v}_2 = -(\vec{v}_1 \bullet \vec{j}) \vec{i} + (\vec{v}_1 \bullet \vec{i}) \vec{j}$ .
3. Soit  $H$  défini par  $\overrightarrow{AH} = \varrho \vec{v}_2$ .
4. Soit  $M$  défini par  $\overrightarrow{HM} = \lambda \vec{v}_1$  où  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

Alors, lorsque  $\lambda$  décrit  $\mathbf{R}$ , le point  $M$  décrit la droite passant par le point  $H$  et de vecteur directeur  $\vec{v}_1$  si et seulement si :

$$\det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{AM} \right) = \varrho \quad (49)$$

Démonstration :

Soit  $\vec{v}_1(a; b)$  avec  $a^2 + b^2 = 1$ . Soit  $\vec{v}_2 = (-b; a)$ .

Soit  $H$  défini par  $\overrightarrow{AH} = \varrho \vec{v}_2$ .

Nous avons  $\overrightarrow{AH} = (-\varrho b; \varrho a)$

$$\begin{aligned} \det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{AM} \right) &= \det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{AH} \right) + \det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{HM} \right) \\ &= \det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{AH} \right) + \det \left( \vec{v}_1; \lambda \vec{v}_1 \right) \\ &= \det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{AH} \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{AH} \right) = \begin{vmatrix} a & -\varrho b \\ b & \varrho a \end{vmatrix} = \varrho (a^2 + b^2) = \varrho$$

■

Notons que nous avons :

$$\det \left( \vec{v}_1; \overrightarrow{AH} \right) = \vec{v}_2 \bullet \overrightarrow{AH} = \varrho$$

ce qui permet de faire le lien avec la notion de ligne de niveau.

**Corollaire 3 ( ) :**

En reprenant les hypothèses et la construction du point  $H$  dans la proposition 1, la base  $(\vec{v}_1; \vec{v}_2)$  est directe.

Démonstration :

$$\det(\vec{v}_1; \vec{v}_2) = \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2 = 1$$

et :

$$\begin{aligned} & \det(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \\ &= \|\vec{v}_1\| \times \|\vec{v}_2\| \times \sin(\widehat{\vec{v}_1; \vec{v}_2}) \\ &= \sin(\widehat{\vec{v}_1; \vec{v}_2}) \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\sin(\widehat{\vec{v}_1; \vec{v}_2}) = 1$$

d'où :

$$(\widehat{\vec{v}_1; \vec{v}_2}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

■

Lorsque le point pondéré est remplacé par le vecteur  $\vec{P}_2$ , le déterminant  $\det(\vec{v}_1; \vec{AM})$  est remplacé par  $\det(\vec{v}_1; \vec{M})$  et il n'y a plus de point. La démarche est très ressemblante, il suffit d'écrire :

$$\vec{M} = \varrho \vec{v}_2 + \lambda \vec{v}_1$$

car :

$$\begin{aligned} \det(\vec{v}_1; \vec{M}) &= \det(\vec{v}_1; \varrho \vec{v}_2 + \lambda \vec{v}_1) \\ &= \underbrace{\varrho \det(\vec{v}_1; \vec{v}_2)}_{=1} + \underbrace{\lambda \det(\vec{v}_1; \vec{v}_1)}_{=0} \\ &= \varrho \end{aligned}$$

et la formule (49) est remplacée par :

$$\det(\vec{v}_1; \varrho \vec{v}_2 + \lambda \vec{v}_1) = \varrho \quad (50)$$

mais, si  $\varrho \neq 0$ , lorsque  $\lambda$  décrit  $\mathbf{R}$ , le vecteur  $\varrho \vec{v}_2 + \lambda \vec{v}_1$  n'appartient pas à une droite vectorielle.

**5.2. Jointures entre un arc de cercle et un segment**

Cet exemple est un cas « école » puisque le cercle osculateur à un cercle en un point est le cercle lui-même tandis que le cercle osculateur à une droite en un point est la droite elle-même c'est-à-dire un cercle centré à l'infini et de rayon infini. Ainsi, la courbure en un point d'un cercle de rayon  $R$  (resp. d'une droite) est  $\frac{1}{R}$  (resp. 0).

Considérons l'arc de cercle d'équation :

$$\gamma_0(t) = (\sqrt{2} \cos(t); \sqrt{2} \sin(t)), \quad t \in \left[ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right]$$

Soit :

$$A = \gamma_0 \left( \frac{7\pi}{4} \right) = (1; -1)$$

et le segment d'extrémités  $B(3;0)$  et  $C(2;-1)$ . Nous allons réaliser une jointure  $G^2$  entre  $\gamma_0$  en  $A$  et  $[BC]$  en  $B$  par une courbe de Bézier de degré  $n$ . Nous devons avoir trois points de contrôle en 0 et trois points de contrôle en 1, il est naturel de prendre  $n = 5$ .

Nous avons  $P_0 = A$  et  $P_5 = B$ .

Nous avons :

$$\frac{d\gamma_0}{dt} \left( \frac{7\pi}{4} \right) (1; 1)$$

et nous pouvons prendre  $P_1$  défini par :

$$\vec{AP}_1 = 2 \frac{d\gamma_0}{dt} \left( \frac{7\pi}{4} \right)$$

d'où :

$$P_1(3;1)$$

d'où :

$$\vec{P_0P_1}(2;2)$$

et :

$$\|\vec{P_0P_1}\| = 2\sqrt{2}$$

Nous pouvons prendre  $P_4$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $B$  et nous avons :

$$P_4(4;1)$$

Le rayon du cercle étant  $\sqrt{2}$ , la courbure à  $\gamma_0$  en  $A$  est  $\rho_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La courbure à la courbe de Bézier en 0 est donnée par la formule (33) d'où :

$$\rho_0 = \left| \frac{\omega_0(n-1)\omega_2 \det \left( \frac{1}{\|\vec{P_0P_1}\|} \vec{P_0P_1}; \vec{P_0P_2} \right)}{n\omega_1^2 \|\vec{P_0P_1}\|^2} \right|$$

d'où :

$$\det \left( \frac{1}{\|\vec{P_0P_1}\|} \vec{P_0P_1}; \vec{P_0P_2} \right) = \frac{\rho_0 n \omega_1^2 \|\vec{P_0P_1}\|^2}{\omega_0(n-1)\omega_2}$$

Preons  $\omega_0 = 2, \omega_1 = \frac{1}{2}, \omega_2 = 2, \omega_3 = 2, \omega_4 = 3, \omega_5 = 1$ .

Nous obtenons :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left| \frac{8 \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|} \overrightarrow{P_0 P_1}; \overrightarrow{P_0 P_2} \right)}{5} \right|$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varrho &= \det \left( \frac{1}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|} \overrightarrow{P_0 P_1}; \overrightarrow{P_0 P_2} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{16} \simeq 0,442 \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|} \overrightarrow{P_0 P_1}$$

i.e. :

$$\vec{v}_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

d'où :

$$\vec{v}_2 = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

et le point  $H$  est défini par :

$$\overrightarrow{P_0 H} = \varrho \vec{v}_2$$

i.e. :

$$H \left( \frac{11}{16}; -\frac{11}{16} \right)$$

et le point  $P_2$  est défini par :

$$\overrightarrow{H P_2} = \overrightarrow{P_0 P_1}$$

c'est-à-dire  $P_2 \left( \frac{43}{16}, \frac{21}{16} \right)$  c'est-à-dire  $P_2 (2,6875; 1,3125)$ .

Il reste à prendre  $P_3$  sur la droite  $(P_4 P_5)$ . Le choix est  $P_3 \left( \frac{9}{2}; \frac{3}{2} \right)$ . La figure 1 montre la jointure  $G^2$  entre un demi-cercle et un segment.

Modifions le point  $C$ , le segment a pour extrémités  $B(3;0)$  et  $C(3;-1)$ . Nous avons  $n=5$ ,  $P_0=A$ ,  $P_5=B$ ,  $P_1(3;1)$  et  $P_4(3;1)$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $B$ . Nous gardons les poids  $\omega_0=2$ ,  $\omega_1=\frac{1}{2}$ ,  $\omega_2=2$ ,  $\omega_3=2$ ,  $\omega_4=3$ ,  $\omega_5=1$  et gardons :

$$H \left( \frac{11}{16}; -\frac{11}{16} \right)$$

et le point

$$P_2 \left( \frac{43}{16}, \frac{21}{16} \right)$$

Il reste à prendre  $P_3$  sur la droite  $(P_4 P_5)$ . En gardant la même relation barycentrique que précédemment, nous avons  $P_3 \left( 3; \frac{3}{2} \right)$ . La figure 2 montre la jointure  $G^2$  entre un demi-cercle et un segment par une courbe de Bézier quintique.

Dans la figure 2, les droites  $(HP_2)$  et  $(CB)$  sont sécantes, il est donc possible de prendre le même point de contrôle pour gérer la  $G^2$ -continuité ce qui permet de diminuer le degré de la courbe de 1, mais il n'est plus possible de contrôler une éventuelle  $C^2$ -continuité en  $A$  et en  $B$ .

Nous avons  $n=4$ ,  $P_0=A$ ,  $P_4=B$ ,  $P_1(3;1)$  et  $P_3(3;1)$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $B$ . Nous gardons les poids  $\omega_0=2$ ,  $\omega_1=\frac{1}{2}$ ,  $\omega_2=2$  et  $\omega_3=3$ ,  $\omega_4=1$ . Il reste à calculer  $H_1$  puis  $P_2$  comme intersection des droites  $Aff \left\{ H; \overrightarrow{P_0 P_1} \right\}$  et  $(BC)$ . En reprenant le raisonnement précédent, nous obtenons :

$$H \left( \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right)$$

et le point

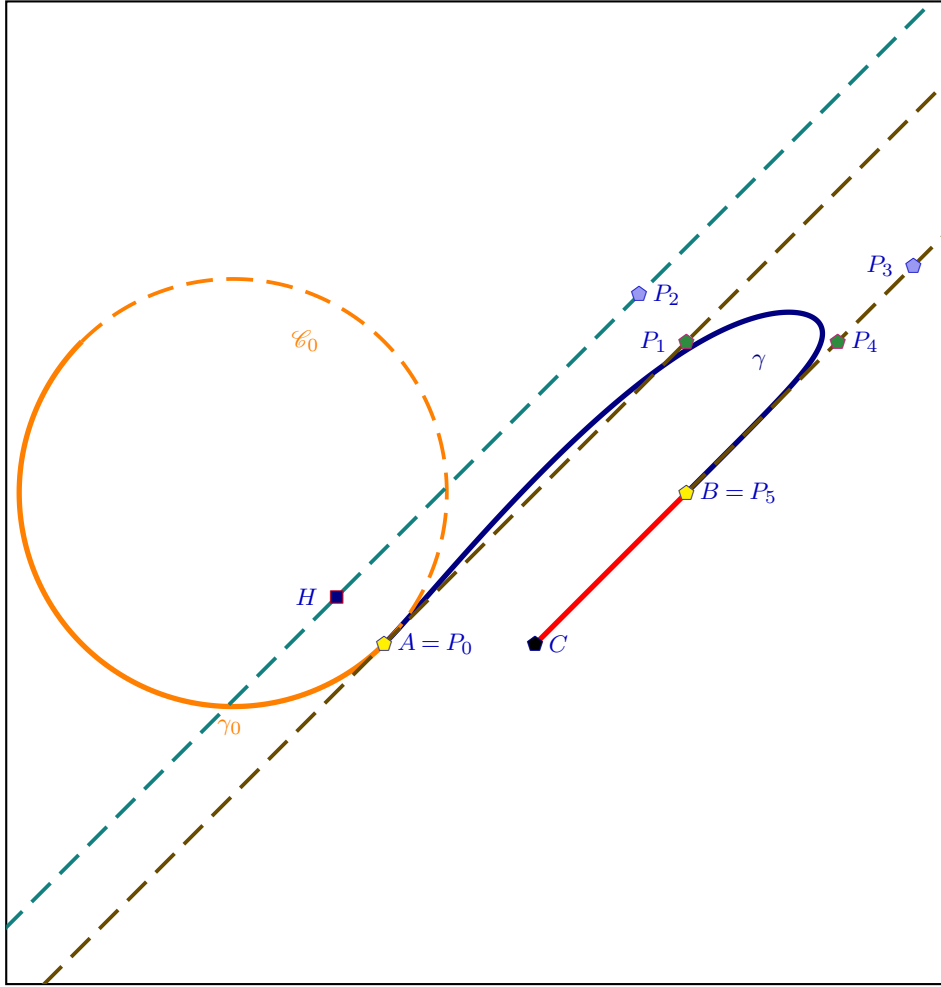
$$P_2 \left( 3, \frac{5}{3} \right)$$

La figure 3 montre la jointure  $G^2$  entre un demi-cercle et un segment par une courbe de Bézier quintique.

Lorsque nous voulons faire une jointure en deux points de courbure nul mais avec des tangentes parallèles, nous ne pouvons pas prendre moins de six points. En revanche, nous pouvons ne prendre que cinq points en introduisant, comme point de contrôle, le vecteur  $\vec{0}$ . Comme exemple, prenons une jointure  $G^2$  entre les segments  $[AB]$  et  $[CD]$  avec  $A(1;2)$ ,  $B(1;1)$ ,  $C(2;-1)$  et  $D(2;-2)$ . Pour avoir une jointure  $G^0$  en  $B$  et en  $C$ , nous avons  $P_0=B$  et  $P_4=C$ . Pour avoir une jointure  $G^1$  en  $B$  et en  $C$ , nous prenons  $P_1(1;0)$  et  $P_3(2;0)$ . Pour avoir une jointure  $G^2$  en  $B$  et en  $C$ , via les corollaires ?? et ??, nous prenons  $\vec{P}_2 = \vec{0}$ . La figure 4 montre la jointure  $G^2$  entre deux segments par deux courbes de Bézier quartiques  $\gamma_P$  et  $\gamma_Q$  de points massiques de contrôle  $P_0=B$ ,  $P_1(1;0)$ ,  $\vec{P}_2 = \vec{0}$ ,  $P_3(2;0)$  et  $P_4=C$  de poids  $\omega_0=1$ ,  $\omega_1=1$ ,  $\omega_2=0$ ,  $\omega_3=1$ ,  $\omega_4=1$  d'une part et  $Q_0=B$ ,  $\vec{P}_1(0;-1)$ ,  $\vec{P}_2 = \vec{0}$ ,  $\vec{P}_3(0;1)$  et  $Q_4=C$  de poids  $\varpi_0=1$ ,  $\varpi_1=0$ ,  $\varpi_2=0$ ,  $\varpi_3=0$ ,  $\varpi_4=1$ , d'autre part.

### 5.3. Jointures entre une boucle du Folium de Descartes et un arc d'une Lemniscate de Bernouilli

La boucle de la Lemniscate de Bernouilli est modélisée par la courbe de Bézier rationnelle quadratique  $\gamma_P$  de points pondérés de contrôle  $(P_0;1)$ ,  $(\vec{P}_1;0)$ ,  $(\vec{P}_2;0)$ ,  $(\vec{P}_3;0)$ ,  $(P_4;1)$  avec  $P_0(-\frac{1}{2};0)$ ,  $\vec{P}_1(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4})$ ,  $\vec{P}_2(0;0)$ ,  $\vec{P}_3(-\frac{1}{4};\frac{1}{4})$  et  $P_4=P_0$  via la translation de vecteur  $-\frac{1}{2}\vec{v}$  [GFB22]. La boucle du Folium de Descartes est modélisée



**FIGURE 1:** Jointure  $G^2$  entre le demi-cercle  $\gamma_0$  et le segment  $[BC]$  par une courbe de Bézier rationnelle quintique  $\gamma$  et le cercle osculateur  $\mathcal{C}_0$  à  $\gamma_0$  en  $A$  et à  $\gamma$  en  $P_0$ .

par la courbe de Bézier rationnelle cubique  $\gamma_Q$  de points de contrôle  $Q_0 = (0; 2)$  de poids  $\omega_{Q_0} = 1$ ,  $\vec{Q}_1(2; 0)$  de poids  $\omega_{Q_1} = 0$ ,  $\vec{Q}_2(0; 2)$  de poids  $\omega_{Q_2} = 0$  et  $Q_3 = Q_0$  de poids  $\omega_{Q_3} = 1$  via la translation de vecteur  $\frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$  [GFB22]. La figure 5 montre la boucle de la Lemniscate de Bernoulli  $\gamma_P$  ainsi que la boucle du Folium de Descartes  $\gamma_Q$ .

**5.3.1. Jointure entre  $\gamma_P$  et  $\gamma_R$  en  $P_4$  et  $\gamma_Q$  et  $\gamma_R$  en  $Q_0$**

**5.3.1.1. Jointure  $G^1$  et  $C_1$**  La courbe de Bézier  $\gamma_R$  réalisant cette jointure est de degré 5. Pour obtenir une double jointure  $G^0$  entre  $\gamma_P$  et  $\gamma_Q$  par  $\gamma_R$ , nous avons :

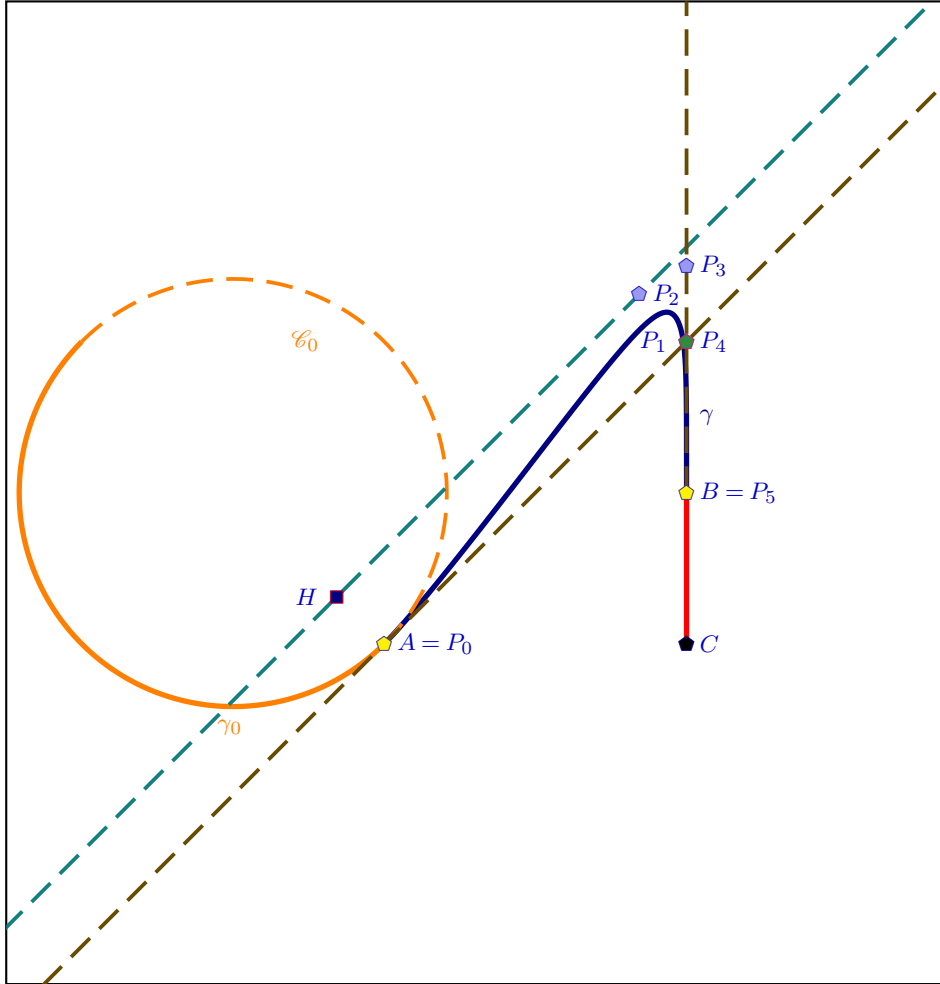
$$\begin{cases} R_0 \left( -\frac{1}{2}; 0 \right) \\ R_5 \left( \frac{1}{2}; 2 \right) \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, nous devons fixer les poids de la courbe  $\gamma_R$ . Nous choisissons :

$$\begin{cases} \omega_{R_0} = 2 \\ \omega_{R_1} = 0 \\ \omega_{R_2} = 1 \\ \omega_{R_3} = 1 \\ \omega_{R_4} = 0 \\ \omega_{R_5} = 1 \end{cases}$$

Pour avoir une jointure  $G^1$  et  $C^1$  entre  $\gamma_P$  et  $\gamma_R$  en  $P_4$ , nous avons :

$$-4 \frac{1}{\omega_{P_4}} \vec{P}_3 = 5 \frac{1}{\omega_{R_0}} \vec{R}_1$$



**FIGURE 2:** Jointure  $G^2$  entre le demi-cercle  $\gamma_0$  et le segment  $[BC]$  par une courbe de Bézier rationnelle quintique  $\gamma$  et le cercle osculateur  $\mathcal{C}_0$  à  $\gamma_0$  en  $A$  et à  $\gamma$  en  $P_0$ .

ce qui donne :

$$\vec{R}_1 = -\frac{4}{5} \frac{\omega_{R_0}}{\omega_{P_4}} \vec{P}_3$$

d'où :

$$\vec{R}_1 \left( \frac{2}{5}; -\frac{2}{5} \right)$$

Pour avoir une jointure  $G^1$  et  $C^1$  entre  $\gamma_Q$  et  $\gamma_R$  en  $Q_0$ , nous avons :

$$3 \frac{1}{\omega_{Q_0}} \vec{Q}_1 = -5 \frac{1}{\omega_{R_5}} \vec{R}_4$$

ce qui donne :

$$\vec{R}_4 = -\frac{3}{5} \frac{\omega_{R_5}}{\omega_{Q_0}} \vec{Q}_1$$

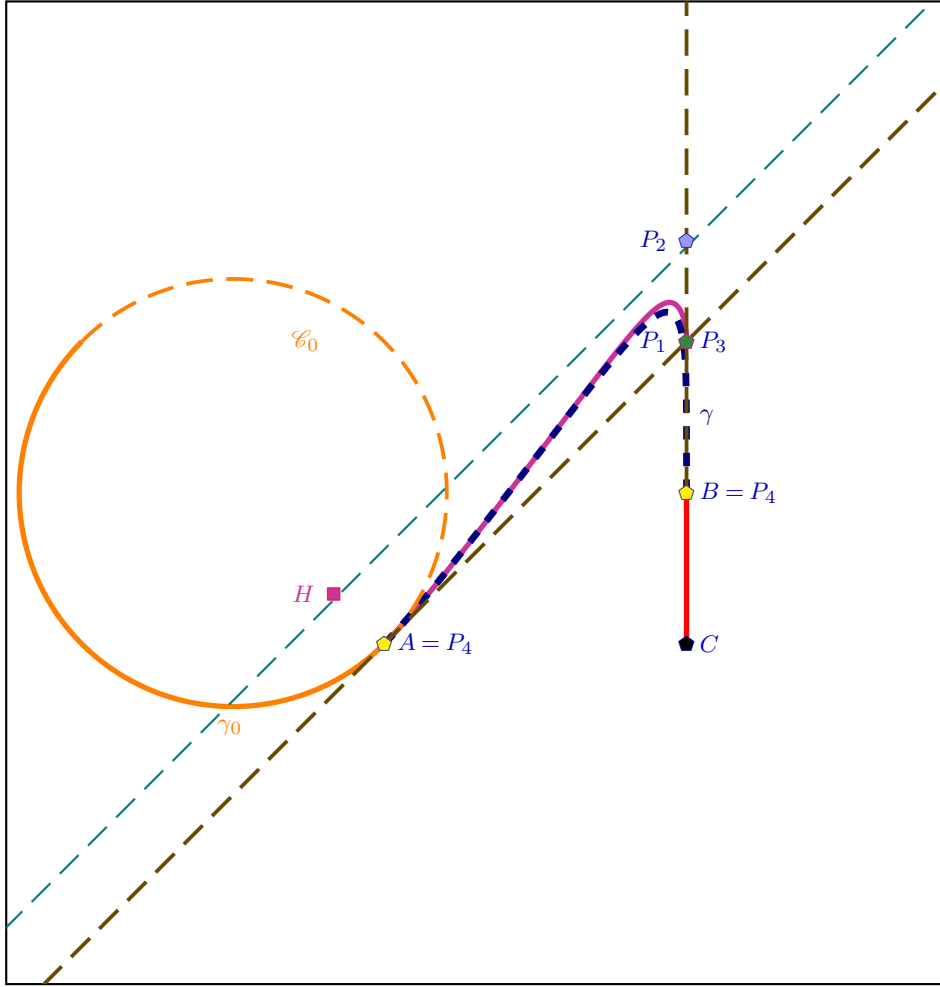
d'où :

$$\vec{R}_4 \left( -\frac{6}{5}; 0 \right)$$

**5.3.1.2. Jointure  $G^2$**  Nous devons calculer les cercles osculateurs à  $\gamma_P$  en  $P_4$  et à  $\gamma_Q$  en  $Q_0$ .

Comme nous avons  $\vec{P}_2 = \vec{0}$ , la courbure de  $\gamma_P$  en  $P_4$  est le cercle osculateur à  $\gamma_P$  en  $P_4$  est la droite passant par  $P_4$  et de vecteur directeur  $\vec{P}_3$ . Ainsi, le point  $R_2$  appartient à cette droite. Nous prenons :

$$R_2 \left( \frac{3}{2}; -2 \right)$$



**FIGURE 3:** Jointure  $G^2$  entre le demi-cercle  $\gamma_0$  et le segment  $[BC]$  par une courbe de Bézier rationnelle quartique  $\gamma$  et le cercle osculateur  $\mathcal{C}_0$  à  $\gamma_0$  en  $A$  et à  $\gamma$  en  $P_0$ .

Le vecteur tangent unitaire à  $\gamma_Q$  en  $Q_0$  est :

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{Q}_1\|} \vec{Q}_1 = \vec{i}$$

et la condition de la formule (14) implique que le vecteur normal principal est :

$$\vec{N}_1 = \vec{j}$$

et, en utilisant la formule (30), la courbure du Folium de Descartes en  $Q_0$  est :

$$\rho_1 = \frac{1}{3}$$

et le centre du cercle osculateur est  $O_1(0; 5)$  et son rayon est 3.

Le point  $H_1$  de la droite définissant le lieu géométrique

des points  $R_2$  est défini par :

$$\vec{Q_0 H_1} = \rho_1 \vec{j}$$

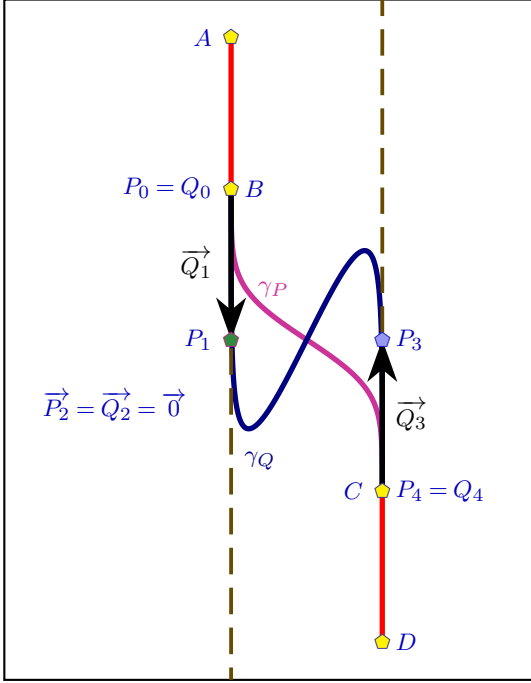
et nous obtenons :

$$H_1 \left( 0; \frac{7}{3} \right)$$

et le point  $R_3$  appartient à la droite  $\text{Aff}\{H_1; \vec{i}\}$  et nous choisissons :

$$R_3 \left( -1; \frac{7}{3} \right)$$

La figure 6 montre une jointure  $G^2$  et  $C^1$  entre la boucle de la Lemniscate de Bernouilli  $\gamma_P$  et la boucle du Folium de Descartes  $\gamma_Q$  par la courbe de Bézier rationnelle quintique  $\gamma_R$  ainsi que les cercles osculateurs  $\mathcal{C}_1$  à  $\gamma_Q$  en  $Q_0$  et  $\mathcal{C}_0$  à  $\gamma_P$  en  $P_4$ .



**FIGURE 4:** Jointure  $G^2$  entre deux segments parallèles par une courbe de Bézier rationnelle quartique.

### 5.3.2. Jointures entre $\gamma_Q$ et $\gamma_R$ en $Q_3$ et $\gamma_P$ et $\gamma_R$ en $P_0$

**5.3.2.1. Jointure  $G^1$  et  $C_1$**  La courbe de Bézier  $\gamma_S$  réalisant cette jointure est de degré 5. Pour obtenir une double jointure  $G^0$  entre  $\gamma_P$  et  $\gamma_Q$  par  $\gamma_S$ , nous avons :

$$\begin{cases} S_0 \left( \frac{1}{2}; 2 \right) \\ S_5 \left( -\frac{1}{2}; 0 \right) \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, nous devons fixer les poids de la courbe  $\gamma_R$ . Nous choisissons :

$$\begin{cases} \omega_{S_0} = 2 \\ \omega_{S_1} = 1 \\ \omega_{S_2} = 1 \\ \omega_{S_3} = 1 \\ \omega_{S_4} = 2 \\ \omega_{S_5} = 1 \end{cases}$$

Pour avoir une jointure  $G^1$  et  $C^1$  entre  $\gamma_Q$  et  $\gamma_S$  en  $Q_3 = S_0$ , nous avons :

$$-3 \frac{1}{\omega_{Q_3}} \vec{Q}_2 = 5 \frac{\omega_{S_1}}{\omega_{S_0}} \vec{S}_0 \vec{S}_1$$

ce qui donne :

$$\vec{S}_0 \vec{S}_1 = -\frac{3}{5} \frac{\omega_{S_0}}{\omega_{Q_3} \omega_{S_1}} \vec{Q}_2$$

d'où :

$$S_1 \left( \frac{1}{2}; -\frac{2}{5} \right)$$

Pour avoir une jointure  $G^1$  et  $C^1$  entre  $\gamma_P$  et  $\gamma_S$  en  $P_0 = S_5$ , nous avons :

$$4 \frac{1}{\omega_{P_0}} \vec{P}_1 = -5 \frac{\omega_{S_4}}{\omega_{S_5}} \vec{S}_5 \vec{S}_4$$

ce qui donne :

$$\vec{S}_5 \vec{S}_4 = -\frac{4}{5} \frac{\omega_{S_5}}{\omega_{P_0} \omega_{S_4}} \vec{P}_1$$

d'où :

$$S_4 \left( -\frac{2}{5}; \frac{1}{10} \right)$$

**5.3.2.2. Jointure  $G^2$  et  $C_2$**  Il reste à déterminer les points de contrôle  $S_2$  et  $S_3$ .

Comme nous avons  $\vec{P}_2 = \vec{0}$ , la courbure de  $\gamma_P$  en  $P_0$  est le cercle osculateur à  $\gamma_P$  en  $P_4$  est la droite passant par  $P_0$  et de vecteur directeur  $\vec{P}_1$ . Ainsi, le point  $R_2$  appartient à cette droite. Nous allons déterminer le point de cette droite pour réaliser une jointure  $C^2$ . En utilisant la formule (25), la dérivée seconde de  $\gamma_P$  en  $P_0$  est :

$$\vec{a}_1 = \frac{2n}{\omega_{P_0}} \vec{P}_1 = 8 \vec{P}_1$$

tandis qu'en utilisant la formule (42), la dérivée seconde de  $\gamma_S$  en  $S_5$  est :

$$\vec{a}_2 = 10 \left( \frac{\omega_{S_5} - 5\omega_{S_4}}{\omega_{S_5}^2} \right) \omega_{S_4} \vec{S}_5 \vec{S}_4 + 20 \frac{\omega_{S_3}}{\omega_{S_5}} \vec{S}_5 \vec{S}_3$$

Pour obtenir une jointure  $C^2$ , nous avons :

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2$$

d'où :

$$20 \frac{\omega_{S_3}}{\omega_{S_5}} \vec{S}_5 \vec{S}_3 = 8 \vec{P}_1 - 10 \left( \frac{\omega_{S_5} - 5\omega_{S_4}}{\omega_{S_5}^2} \right) \omega_{S_4} \vec{S}_5 \vec{S}_4$$

qui se simplifie en :

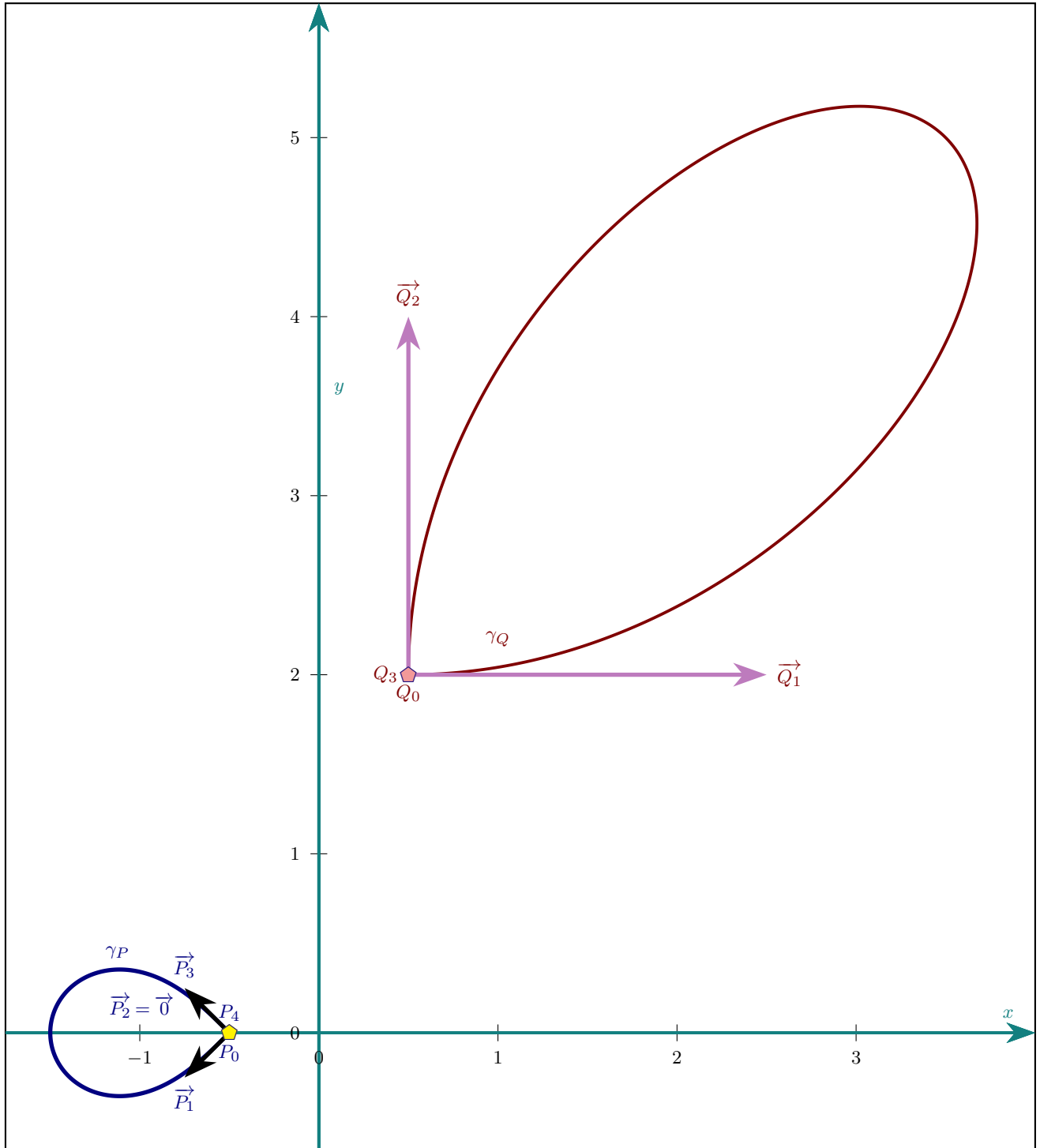
$$\vec{S}_5 \vec{S}_3 = \frac{2\omega_{S_5}}{5\omega_{S_3}} \vec{P}_1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{S_4}}{\omega_{S_3}} \left( \frac{\omega_{S_5} - 5\omega_{S_4}}{\omega_{S_5}} \right) \vec{S}_5 \vec{S}_4$$

et nous obtenons :

$$S_3 \left( \frac{3}{10}; \frac{4}{5} \right)$$

Il reste à déterminer le point  $S_2$ . En utilisant la formule (39), la dérivée seconde de  $\gamma_Q$  en  $Q_3$  est donnée par :

$$\vec{a}_3 = 6 \vec{Q}_2 + 6 \vec{Q}_1$$



**FIGURE 5:** Boucles d'une Lemniscate de Bernouilli  $\gamma_P$  et du Folium de Descartes  $\gamma_Q$  représentées par des courbes de Bézier rationnelles cubique et quartique.



et en utilisant la formule (39), la dérivée seconde de  $\gamma_S$  en  $S_0$  est donnée par :

$$\vec{a}_4 = 10 \left( \frac{\omega_{S_0} - 5\omega_{S_1}}{\omega_{S_0}^2} \right) \omega_{S_1} \overrightarrow{S_0 S_1} + 20 \frac{\omega_{S_2}}{\omega_{S_0}} \overrightarrow{S_0 S_2}$$

Pour obtenir une jointure  $C^2$ , nous avons :

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_4$$

d'où :

$$\begin{aligned} & 20 \frac{\omega_{S_2}}{\omega_{S_0}} \overrightarrow{S_0 S_2} \\ = & -10 \left( \frac{\omega_{S_0} - 5\omega_{S_1}}{\omega_{S_0}^2} \right) \omega_{S_1} \overrightarrow{S_0 S_1} + 6 \left( \overrightarrow{Q_2} + \overrightarrow{Q_1} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_0 S_2} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{S_0} - 5\omega_{S_1}}{\omega_{S_0}} \right) \frac{\omega_{S_1}}{\omega_{S_2}} \overrightarrow{S_0 S_1} \\ & + \frac{3}{10} \frac{\omega_{S_0}}{\omega_{S_2}} \left( \overrightarrow{Q_2} + \overrightarrow{Q_1} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$S_2 \left( \frac{17}{10}; \frac{14}{10} \right)$$

La figure 7 montre une jointure  $G^2$  et  $C^2$  entre la boucle de la Lemniscate de Bernouilli  $\gamma_P$  et la boucle du Folium de Descartes  $\gamma_Q$  par la courbe de Bézier rationnelle quintique  $\gamma_S$  ainsi que les cercles osculateurs  $\mathcal{C}_3$  à  $\gamma_Q$  en  $Q_3$  et  $\mathcal{C}_2$  à  $\gamma_P$  en  $P_0$ .

## 6. Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons donné les propriétés différentielles à l'ordre 2 des courbes de Bézier rationnelles à points massiques de contrôle : vecteur vitesse, vecteur accélération, courbure et cercle osculateur. Nous avons utilisé ces résultats pour réaliser des jointures  $G^2$  entre deux courbes. Dans cette première approche, nous obtenons deux degrés de liberté rectiligne : le premier pour la jointure  $G^1$  et le second pour la jointure  $G^2$ . Dans un second temps, si nous voulons en plus une jointure  $C^1$ , nous n'avons plus qu'un degré de liberté. En revanche, si nous voulons en plus une jointure  $C^2$ , nous n'avons qu'une et une seule solution.

Dans un futur proche, nous comptons étudier ce type de jointures en trois dimensions et nous intéresser en plus à la torsion, via le repère de Frenet, des courbes de Bézier rationnelles.

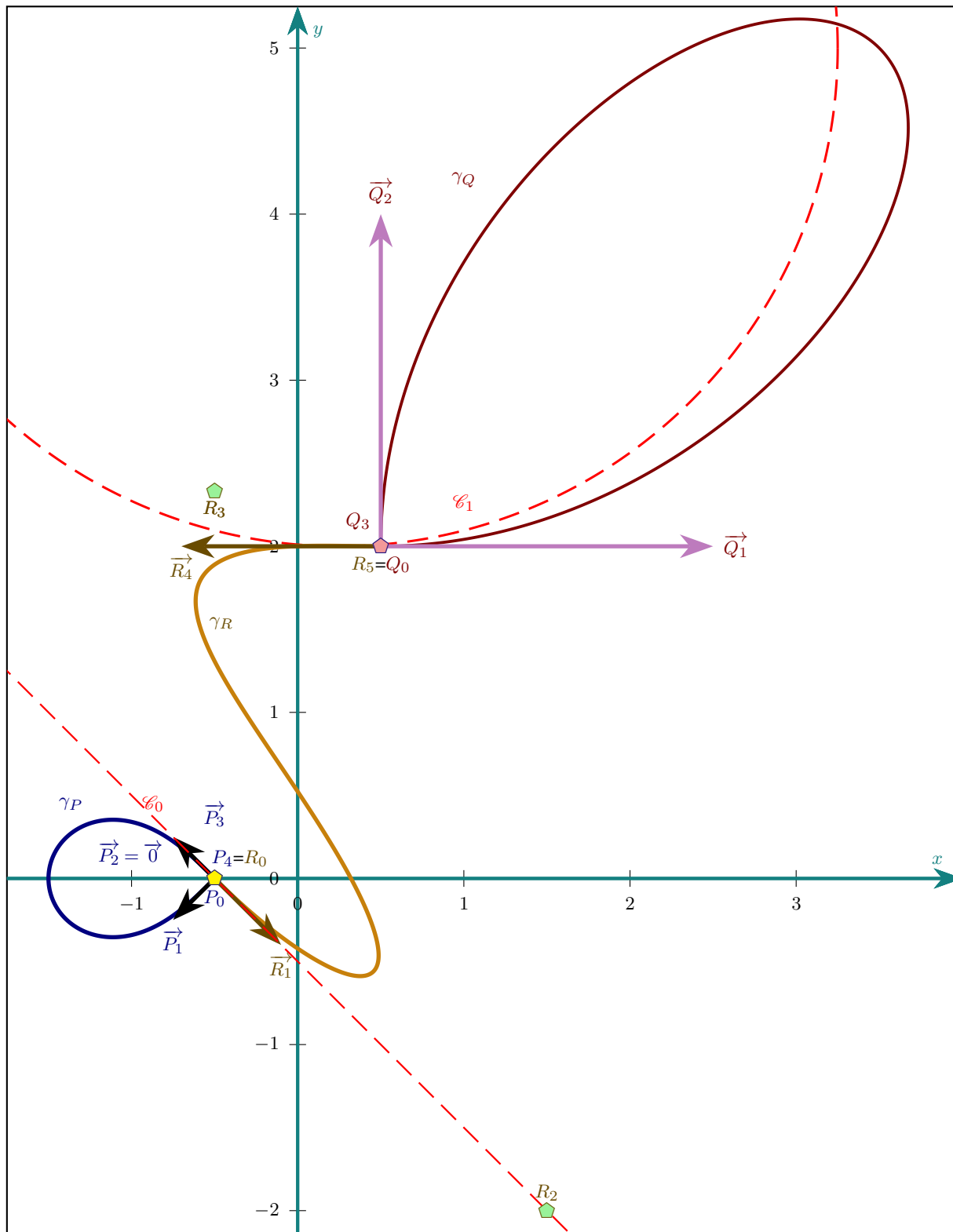
## Références

- [Aud06] AUDIN M. : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006. ISBN 2-86883-883-9.  
[Béc97] BÉCAR J. P. : *Forme (BR) des coniques et de*

*leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.

- [Béz86] BÉZIER P. : *Courbe et surface*, 2ème ed., vol. 4. Hermès, Paris, Octobre 1986.  
[BG92] BERGER M., GOSTIAUX B. : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2ème ed. PUF, avril 1992.  
[BG14] BÉCAR J. P., GARNIER L. : Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014* (Lyon, 26 au 27 mars 2014).  
[Cas85] CASTELJAU P. D. : *Mathématiques et CAO. Volume 2 : formes à pôles*. Hermes, 1985.  
[DLG13] DRUOTON L., LANGEVIN R., GARNIER L. : Blending canal surfaces along given circles using Dupin cyclides. *International Journal of Computer Mathematics* (2013), 1–20.  
[Far92] FARIN G. : From conics to nurbs : A tutorial and survey. *IEEE Comput. Graph. Appl.* Vol. 12, Num. 5 (septembre 1992), 78–86.  
[Far99] FARIN G. : *NURBS from Projective Geometry to Pratical Use*, 2 ed. A K Peters, Ltd, 1999. ISBN 1-56881-084-9.  
[FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.  
[FJ92] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, vol. RMA 24. Masson, 1992.  
[GB16] GARNIER L., BÉCAR J.-P. : Mass points, Bézier curves and conics : a survey. In *Eleventh International Workshop on Automated Deduction in Geometry* (Strasbourg, France, juin 2016), Proceedings of ADG 2016, pp. 97–116. <http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/~garnier/publications/adg2016/>.  
[GB17] GARNIER L., BÉCAR J. P. : *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal*. Editions Universitaires Européennes, Saarbrucken, 2017. ISBN 978-3-639-54676-7.  
[GBD17] GARNIER L., BÉCAR J.-P., DRUOTON L. : Canal surfaces as Bézier curves using mass points. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 54 (2017), 15–34.  
[GBD\*19] GARNIER L., BÉCAR J., DRUOTON L., FUCHS L., MORIN G. : Theory of minkowski-lorentz spaces. In *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*, Lee N., (Ed.). Springer, 2019.  
[GBD\*20] GARNIER L., BÉCAR J. P., DRUOTON L., FUCHS L., MORIN G. : *Minkowski-Lorentz Spaces Applications : Resolution of Apollonius and Dupin Problems*. Springer International Publishing, Cham, 2020, pp. 1–10.  
[GBMF15] GARNIER L., BÉCAR J. P., MORIN G., FUCHS L. : Une application de l'espace des

- sphères : détermination des sphères de Dandelin. AFIG, (Ed.), Université de Lyon, LIRIS. [http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page\\_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf](http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf).
- [GDB\*21a] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J., FUCHS L., MORIN G. : Subdivisions of Horned or Spindle Dupin Cyclides Using Bézier Curves with Mass Points. *WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS*. Vol. 20 (12 2021), 756–776.
- [GDB\*21b] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J., FUCHS L., MORIN G. : Subdivisions of Ring Dupin Cyclides Using Bézier Curves with Mass Points. *WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS*. Vol. 20 (11 2021), 581–596.
- [GFB22] GARNIER L., FUCHS L., BÉCAR J. : Courbes de Bézier, cinématique et ode au vecteur  $\vec{0}$  de contrôle. In *GTMG 2022* (Dijon, France, 2022).
- [Gou83] GOURION M. : *Mathématiques, Terminales C et E, tome 2*. Fernand Nathan, 1983.
- [Lad02] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, Paris, 2002. ISBN 2-7298-1148-6.
- [Lad03] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, Paris, 2003. ISBN 2-7298-1416-7.
- [LSD\*14] LANGEVIN R., SIFRE J.-C., DRUOTON L., GARNIER L., PALUSZNY M. : Finding a cyclide given three contact conditions. *Computational and Applied Mathematics* (2014), 1–18.
- [PT89] PIEGL L., TILLES W. : A managerie of rational b-spline circles. *IEEE Computer Graphics and Applications*. Vol. 9, Num. 5 (1989), 46–56.
- [PT95] PIEGL L., TILLER W. : *The NURBS book*. Monographs in visual communication. Springer, 1995.



**FIGURE 6:** Courbe de Bézier rationnelle quintique réalisant une jointure  $G^2$  et  $C^1$  entre la boucle de la Lemniscate de Bernouilli  $\gamma_P$  et la boucle du Folium de Descartes  $\gamma_Q$ .

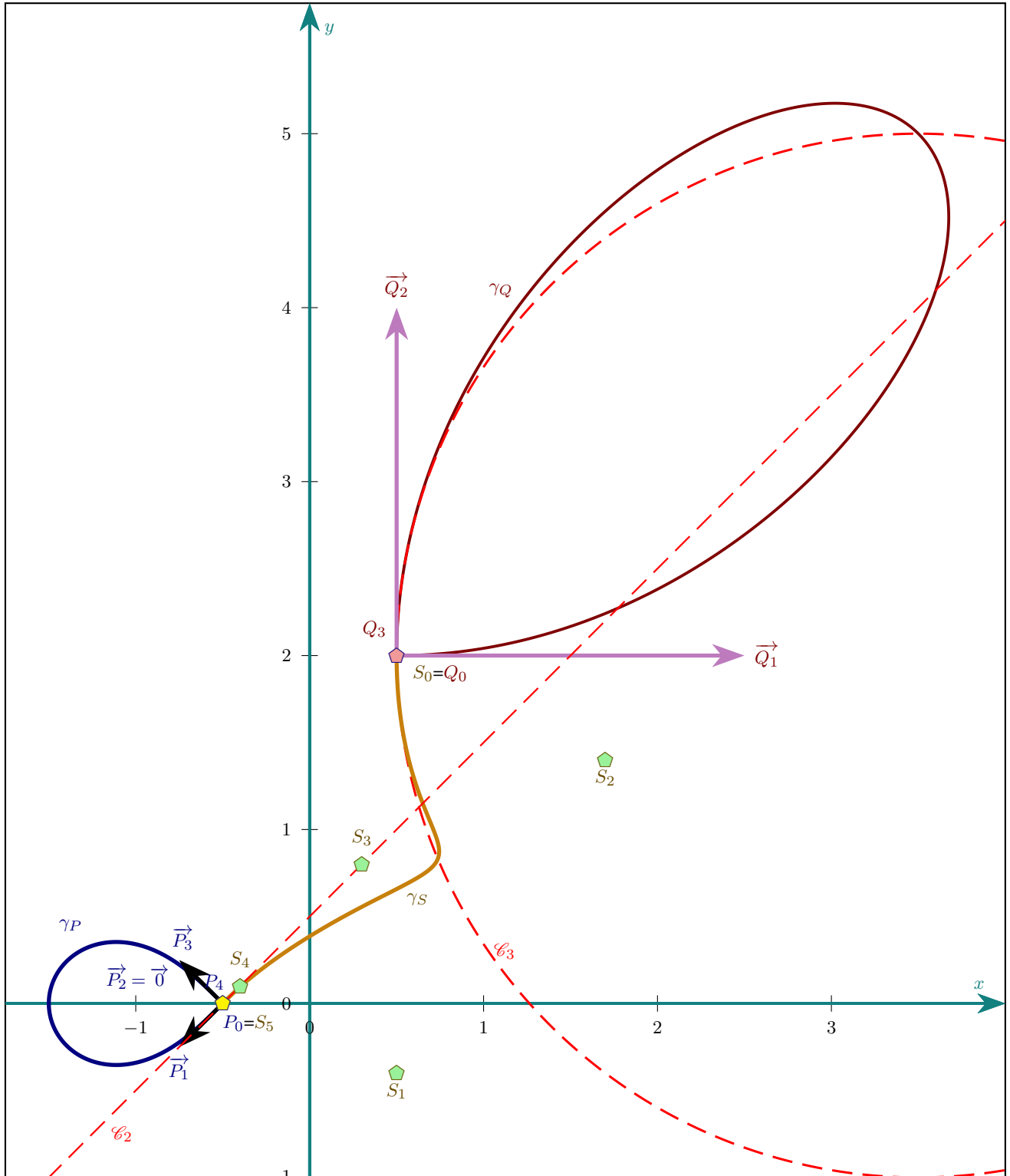


FIGURE 7: Courbe de Bézier rationnelle quintique réalisant une jointure  $G^2$  et  $C^2$  entre la boucle de la Lemniscate de Bernouilli  $\gamma_P$  et la boucle du Folium de Descartes  $\gamma_Q$ .

## Annexe

### Appendix A: Démonstration du théorème 2

Nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 n}(t) &= \chi(\omega_1) n t (1-t)^{n-1} \widetilde{P}_1 \\ &+ \chi(\omega_2) \frac{n(n-1)}{2} t^2 (1-t)^{n-2} \widetilde{P}_2 + \sum_{k=3}^n \chi(\omega_i) B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overrightarrow{n}(t) &= \chi(\omega_1) n \left( (1-t)^{n-1} - t(n-1)(1-t)^{n-2} \right) \widetilde{P}_1 \\ &+ \chi(\omega_1) \frac{n(n-1)}{2} \left( 2t(1-t)^{n-2} - t^2(n-2)(1-t)^{n-3} \right) \widetilde{P}_1 \\ &+ \sum_{k=3}^n \chi(\omega_i) \frac{d}{dt} B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{n}(t) &= \chi(\omega_1) n(n-1) \left( -(1-t)^{n-2} - \left( (1-t)^{n-2} - t(1-t)^{n-3} \right) \right) \widetilde{P}_1 \\ &+ \chi(\omega_2) \frac{n(n-1)}{2} \left( 2(1-t)^{n-2} - 2(n-2)t(1-t)^{n-2} \right) \widetilde{P}_2 \\ &+ \chi(\omega_2) \frac{n(n-1)}{2} \left( - \left( 2t(n-2)(1-t)^{n-3} - t^2(n-2)(n-3)(1-t)^{n-4} \right) \right) \widetilde{P}_2 \\ &+ \sum_{k=3}^n \chi(\omega_i) \frac{d^2}{dt^2} B_{k,n}(t) \widetilde{P}_k \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{n}(0) = \overrightarrow{0} \\ \frac{d}{dt} \overrightarrow{n}(0) = n\chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 \\ \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{n}(0) = n(n-1) \left( -2\chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 + \chi(\omega_2) \widetilde{P}_2 \right) \end{array} \right.$$

Nous avons :

$$d(t) = \omega_0 (1-t)^n + \omega_1 n t (1-t)^{n-1} + \omega_2 \frac{n(n-1)}{2} t^2 (1-t)^{n-2} + \sum_{k=3}^n \omega_i B_{k,n}(t)$$

d'où :

$$\begin{aligned} d'(t) &= -\omega_0 n (1-t)^{n-1} + \omega_1 n \left( (1-t)^{n-1} - (n-1)t(1-t)^{n-2} \right) \\ &+ \omega_2 \frac{n(n-1)}{2} \left( 2t(1-t)^{n-2} - (n-2)t^2(1-t)^{n-3} \right) \\ &+ \sum_{k=2}^n \omega_i \frac{d}{dt} B_{k,n}(t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
d''(t) &= \omega_0 n(n-1)(1-t)^{n-2} \\
&+ \omega_1 n \left( -(n-1)(1-t)^{n-2} - (n-1) \left( (1-t)^{n-2} - (n-2)t(1-t)^{n-2} \right) \right) \\
&+ \omega_2 n(n-1) \left( (1-t)^{n-2} - t(1-t)^{n-3} \right) \\
&+ \omega_2 \frac{n(n-1)}{2} \left( -(n-2) \left( 2t(1-t)^{n-3} - (n-3)t^2(1-t)^{n-3} \right) \right) \\
&+ \sum_{k=2}^n \omega_i \frac{d^2}{dt^2} B_{k,n}(t)
\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases}
d(0) = \omega_0 \\
d'(0) = n(\omega_1 - \omega_0) \\
d''(0) = n(n-1)(\omega_0 - 2\omega_1 + \omega_2)
\end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned}
\frac{d''(0)d(0) - 2(d'(0))^2}{(d(0))^3} &= \frac{n(n-1)\omega_0(\omega_0 - 2\omega_1 + \omega_2) - 2n^2(\omega_1 - \omega_0)^2}{\omega_0^3} \\
&= n \frac{(n-1)(\omega_0 - 2\omega_1 + \omega_2) - 2n(\omega_1 - \omega_0)^2}{\omega_0^2}
\end{aligned}$$

et :

$$\frac{d'(0)}{(d(0))^2} = n \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0^2}$$

En utilisant la formule (20), nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \vec{P}_0 \vec{\gamma}}{dt^2}(0) &= -2n \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0^2} n \chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 + \frac{1}{\omega_0} n(n-1) \left( -2\chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 + \chi(\omega_2) \widetilde{P}_2 \right) \\
&= -2n \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0^2} n \left( \chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 \right) + \frac{1}{\omega_0} n(n-1) \left( -2\chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 + \chi(\omega_2) \widetilde{P}_2 \right) \\
&= -2n \left( n \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0^2} + \frac{n-1}{\omega_0} \right) \chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 + \frac{1}{\omega_0} n(n-1) \chi(\omega_2) \widetilde{P}_2 \\
&= 2n \left( \frac{\omega_0 - n\omega_1}{\omega_0^2} \right) \chi(\omega_1) \widetilde{P}_1 + \frac{1}{\omega_0} n(n-1) \chi(\omega_2) \widetilde{P}_2
\end{aligned}$$

et quatre cas sont à distinguer.

— si  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) = \frac{2n}{\omega_0} \overrightarrow{P_1} + n \frac{n-1}{\omega_0} \overrightarrow{P_2} \quad (51)$$

— si  $\omega_1 \neq 0$  et  $\omega_2 = 0$ , le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) = 2n \left( \frac{\omega_0 - n\omega_1}{\omega_0^2} \right) \omega_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \frac{1}{\omega_0} n(n-1) \overrightarrow{P_2} \quad (52)$$

— si  $\omega_1 = 0$  et  $\omega_2 \neq 0$ , le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) = \frac{2n}{\omega_0} \overrightarrow{P_1} + \frac{\omega_2}{\omega_0} n(n-1) \overrightarrow{P_0 P_2} \quad (53)$$

— si  $\omega_1 \omega_2 \neq 0$  le vecteur accélération à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 \gamma}}{dt^2}(0) = 2n \left( \frac{\omega_0 - n\omega_1}{\omega_0^2} \right) \omega_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \frac{\omega_2}{\omega_0} n(n-1) \overrightarrow{P_0 P_2} \quad (54)$$

■