



**HAL**  
open science

# Résultat sur les courbes de Bézier à points massiques de contrôle

Lionel Garnier

► **To cite this version:**

| Lionel Garnier. Résultat sur les courbes de Bézier à points massiques de contrôle. 2023. hal-04051237

**HAL Id: hal-04051237**

**<https://u-bourgogne.hal.science/hal-04051237v1>**

Preprint submitted on 29 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Résultats sur les courbes de Bézier à points massiques de contrôle

L. Garnier, Laboratoire Informatique de Bourgogne

29 mars 2023, 18:44

## Table des matières

1	Courbes de Bézier	2
1.1	Définition des points massiques . . . . .	2
1.2	Courbes de Bézier rationnelles dans $\tilde{\mathcal{P}}$ . . . . .	4
1.3	Propriétés différentielles des courbes de Bézier en 0 et 1 . . . . .	6
1.4	De Casteljau . . . . .	9
1.4.1	Cas du degré 2 . . . . .	9
1.4.2	Cas du degré 3 . . . . .	9
1.4.3	Cas du degré 4 . . . . .	9
1.5	Augmentation du degré . . . . .	12
2	Changement de paramètres homographiques	13
2.1	Définition et théorème fondamental . . . . .	13
2.2	Cas du degré 2 . . . . .	17
2.3	Cas du degré 3 . . . . .	19
2.4	Cas du degré 4 . . . . .	20
3	Cinématique et changement de paramètre quadratique	25
3.1	Définitions et théorème fondamental . . . . .	25
3.2	Cas du degré 2 . . . . .	25
3.3	Cas du degré 3 . . . . .	27
3.4	Cas du degré 4 . . . . .	34
	Références	38

# 1 Courbes de Bézier

## 1.1 Définition des points massiques

L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  et des points pondérés du plan affine  $\mathcal{P}$  sont regroupés dans l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$  défini par :

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{P}} \times \{0\}) \quad (1)$$

et il est possible d'identifier  $\tilde{\mathcal{P}}$  à  $\tilde{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}} \oplus \vec{\mathbb{R}}$ . L'idée est de considérer le plan affine  $\mathcal{P}$  comme un hyperplan de  $\tilde{\mathcal{P}}$  d'équation  $\omega = 1$  : la coordonnée supplémentaire représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré du plan  $\mathcal{P}$ , soit un vecteur du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  à qui nous affectons un poids nul.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés dont la somme des poids est nul n'est pas un point, mais le vecteur :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA_i}$$

qui est indépendant du point  $M$ . Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de  $\mathcal{P}$  et les vecteurs de  $\vec{\mathcal{P}}$ , identifié à l'hyperplan de  $\tilde{\mathcal{P}}$  d'équation  $\omega = 0$ . Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle.

Afin de pouvoir manipuler, de façon très simple et très pédagogique, les coordonnées des points ou des vecteurs, nous définissons l'opération d'addition en utilisant que des concepts faisant intervenir des transformations affines ou vectorielles planes. Ainsi, l'addition sur l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$ , notée  $\oplus$ , est définie de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0$  implique :

$$(M; \omega) \oplus (N; \mu) = (M; \omega) \oplus (N; -\omega) = (\omega \overrightarrow{NM}; 0)$$

- $(M; \omega) \oplus (M; -\omega) = (\omega \overrightarrow{MM}; 0) = (\vec{0}; 0)$

- $\omega + \mu \neq 0$  implique :

$$(M; \omega) \oplus (N; \mu) = \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right)$$

- $(\vec{u}; 0) \oplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$
- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0) = \left( \mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \omega \right)$  où  $\mathcal{T}_{\vec{v}}$  est la translation de  $\mathcal{P}$  de vecteur  $\vec{v}$ .

Remarquons que le barycentre des points pondérés  $(M; \omega)$  et  $(N; \mu)$ , avec la condition  $\omega + \mu \neq 0$ , s'exprime très facilement en utilisant la translation :

$$\begin{aligned} (M; \omega) \oplus (N; \mu) &= (M; \omega + \mu) \oplus (M; -\mu) \oplus (N; \mu) \\ &= (M; \omega + \mu) \oplus (\mu \overrightarrow{MN}; 0) \\ &= \left( \mathcal{T}_{\frac{\mu}{\omega + \mu} \overrightarrow{MN}}(M); \omega + \mu \right) \end{aligned} \quad (2)$$

et si  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\omega$  sont trois nombres non nuls, nous avons :

$$(M; \alpha \omega) \oplus (\alpha \vec{u}; 0) = \left( \mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \alpha \omega \right) \quad (3)$$

d'une part et :

$$(M; \alpha \omega) \oplus (N; \alpha \mu) = \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \alpha (\omega + \mu) \right) \quad (4)$$

d'autre part. De plus, si  $\omega + \mu \neq 0$ , alors, nous avons :

$$(M; \omega) \oplus (M; \mu) = (M; \omega + \mu) \quad (5)$$

Sur l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$ , nous définissons la multiplication par un scalaire, notée  $\odot$ , de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \implies \alpha \odot (M; \omega) = (M; \alpha \omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \odot (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$
- $\alpha \odot (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

Notons que la multiplication  $\alpha \odot (M; \omega)$  permet d'exhiber la différence profonde entre l'ensemble des points massiques et l'utilisation des coordonnées homogènes dans le cadre

de la géométrie projective. De plus, la formule (3) peut s'écrire :

$$(M; \alpha\omega) \oplus (\alpha \vec{u}; 0) = \alpha \odot ((M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0)) \quad (6)$$

## 1.2 Courbes de Bézier rationnelles dans $\tilde{\mathcal{P}}$

Pour tout entier  $n$  non nul,  $B_{i,n}(t)$  désigne le  $1+i$ -ème polynôme de Bernstein.

### Definition 1 Courbe de Bézier rationnelle

Soit  $(P_i; \omega_i)_{i \in [0;n]}$   $n+1$  points massiques de  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Soit  $I$  l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls.

Soit  $J$  l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids nuls.

Soit la fonction  $\omega_f$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i \times B_{i,n}(t)$$

Un point massique  $(M; \omega)$  ou  $(\vec{u}; 0)$  appartient à la courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_i; \omega_i)_{i \in [0;n]}$ , notée  $BR\{(P_i; \omega_i)_{i \in [0;n]}\}$ , s'il existe un réel  $t_0$  de  $[0; 1]$  tel que :

- si  $\omega_f(t_0) \neq 0$  alors, nous avons :

$$\begin{cases} \vec{OM} = \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_{i,n}(t_0) \vec{OP}_i + \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_{i,n}(t_0) \vec{P}_i \\ \omega = \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (7)$$

- si  $\omega_f(t_0) = 0$  alors, nous avons :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i B_{i,n}(t_0) \vec{OP}_i + \sum_{i \in J} B_{i,n}(t_0) \vec{P}_i \quad (8)$$

L'ensemble  $I$  est toujours non vide. Si  $J$  l'est aussi, nous avons une partie affine  $(\vec{OP}_i)_{i \in I}$  et une partie vectorielle  $(\vec{P}_i)_{i \in J}$ .

La courbe de Bézier étant définie à partir de vecteurs et de points pondérés dont la somme des poids vaut 1, elle ne dépend pas du point  $O$  choisi. Il est connu que

si  $P_0$  et  $P_1$  sont deux points (affines) ou que si  $P_{n-1}$  et  $P_n$  sont deux points (affines) d'une courbe de Bézier usuelle de degré  $n$ , alors la tangente en  $P_0$  est la droite  $(P_0P_1)$  et la tangente en  $P_n$  est la droite  $(P_nP_{n-1})$ . L'utilisation de vecteurs de contrôle nous permet de tracer des branches infinies et de caractériser les droites asymptotes et les directions asymptotiques.

Lorsque nous utilisons une programmation non objet, il est commode d'introduire

### Definition 2 Fonction pseudo-identité

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ 0 &\longmapsto 1 \\ x \neq 0 &\longmapsto x \end{aligned} \quad (9)$$

### Notation 1

La notation  $\tilde{P}_i$  désigne soit le vecteur  $\overrightarrow{OP_i}$  soit le vecteur  $\vec{P}_i$ .

En utilisant la formule (9), nous pouvons simplifier la formule (7).

### Proposition 1 Écriture synthétique d'une courbe de Bézier

Soit  $(P_i; \omega_i)_{i \in [0;n]}$   $n+1$  points massiques de  $\tilde{P}$ .

Alors :

- la formule (7) devient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \omega_i} \sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t_0) \tilde{P}_i \\ \omega = \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (10)$$

- la formule (8) devient :

$$\vec{u} = \sum_{i=0}^n \chi(\omega_i) B_{i,n}(t_0) \tilde{P}_i \quad (11)$$

# 1.3 Propriétés différentielles des courbes de Bézier en 0 et 1

Nous avons :

## ♥ Théorème 1

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $\omega_0$  un réel non nul. Soit une courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et ...

Deux cas sont à distinguer :

> si  $\omega_1 = 0$  et  $\vec{P}_1$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM_n(0)} = \frac{n}{\omega_0} \vec{P}_1 \quad (12)$$

> si  $\omega_1 \neq 0$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_0$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM_n(0)} = n \frac{\omega_1}{\omega_0} \overrightarrow{P_0 P_1} \quad (13)$$

## Démonstration :

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $\omega_0$  non nul. Posons :

$$\begin{cases} \vec{n}_3(t) = \sum_{k \in [3;n] \cap I} \omega_k B_{k,n}(t) \overrightarrow{OP_k} + \sum_{k \in [2;n] \cap J} B_{k,n}(t) \vec{P}_k \\ d(t) = \sum_{k=3}^n \omega_k B_{k,n}(t) \end{cases}$$

et nous pouvons écrire :

$$\vec{n}_3(t) = \sum_{k \in [3;n]} \chi(\omega_k) B_{k,n}(t) \tilde{P}_k$$

où  $\tilde{P}_k = \overrightarrow{OP_k}$  si  $\omega_k \neq 0$  et  $\tilde{P}_k = \vec{P}_k$  si  $\omega_k = 0$ .

$$\begin{cases} \vec{n}(t) = \omega_0 (1-t)^n \overrightarrow{OP_0} + n \chi(\omega_1) t (1-t)^{n-1} \tilde{P}_1 + \chi(\omega_2) \frac{n(n-1)}{2} t^2 (1-t)^{n-2} \tilde{P}_2 + \vec{n}_3(t) \\ \omega(t) = \omega_0 (1-t)^n + n \omega_1 t (1-t)^{n-1} + \omega_2 \frac{n(n-1)}{2} t^2 (1-t)^{n-2} + d(t) \end{cases} \quad (14)$$

Si nous avons :

$$\omega(t) \neq 0$$

alors un point  $M_n(t)$  de la courbe de Bézier est défini par

$$\overrightarrow{OM_n(t)} = \frac{1}{\omega(t)} \vec{n}(t)$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{d}{dt} \vec{n}(t) = -n\omega_0(1-t)^{n-1} \overrightarrow{OP_0} + n\chi(\omega_1)(1-t)^{n-1} \widetilde{P_1} + \vec{\varphi}(t)$$

avec  $\vec{\varphi}(0) = \vec{0}$  d'une part et :

$$d'(t) = -n\omega_0(1-t)^{n-1} + n\omega_1(1-t)^{n-1} + \psi(t)$$

avec  $\psi(0) = 0$  d'autre part. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}(0) = \omega_0 \overrightarrow{OP_0} \\ \omega(0) = \omega_0 \\ \frac{d}{dt} \vec{n}(0) = -n\omega_0 \overrightarrow{OP_0} + n\chi(\omega_1) \widetilde{P_1} \\ \omega'(0) = n(\omega_1 - \omega_0) \end{array} \right.$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM_n(0)} &= \frac{1}{\omega(0)} \frac{d}{dt} \vec{n}(0) - \frac{\omega'(0)}{\omega^2(0)} \vec{n}(0) \\ &= \frac{1}{\omega_0} \left( -n\omega_0 \overrightarrow{OP_0} + n\chi(\omega_1) \widetilde{P_1} \right) - \frac{n(\omega_1 - \omega_0)}{\omega_0^2} \omega_0 \overrightarrow{OP_0} \\ &= \frac{1}{\omega_0} \left( n\chi(\omega_1) \widetilde{P_1} - n\omega_1 \overrightarrow{OP_0} \right) \end{aligned}$$

et deux cas sont à distinguer :

➤ si  $\omega_1 = 0$ , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM_n(0)} = \frac{n}{\omega_0} \widetilde{P_1}$$

et si  $\widetilde{P_1} = \vec{0}$  alors le point  $P_0$  est un point stationnaire ;



> si  $\omega_1 \neq 0$ , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM_n(0)} = n \frac{\omega_1}{\omega_0} \overrightarrow{P_0 P_1}$$



### Corollaire 1 Points stationnaire en 0

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $\omega_0$  un réel non nul. Soit une courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et ...

Si  $\overrightarrow{P_1} = \vec{0}$  (donc  $\omega_1 = 0$ ) ou  $P_0 = P_1$  alors le point  $P_0$  est un point stationnaire.

Etant donné la symétrie des courbes de Bézier, nous pouvons énoncer :

### Théorème 2

Soit  $\omega_n$  un réel non nul. Soit une courbe de Bézier de degré  $n$ , de points massiques de contrôle ...,  $(P_{n-1}; \omega_{n-1})$ ,  $(P_n; \omega_n)$ .

Deux cas sont à distinguer :

> si  $\omega_{n-1} = 0$  et  $\overrightarrow{P_{n-1}} \neq \vec{0}$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_n$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM_n(1)} = -\frac{n}{\omega_n} \overrightarrow{P_{n-1}} \quad (15)$$

> si  $\omega_{n-1} \neq 0$ , le vecteur vitesse à la courbe en  $P_n$  est :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM_n(1)} = -n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \overrightarrow{P_n P_{n-1}} \quad (16)$$

### Corollaire 2 Points stationnaire en 1

Soit  $\omega_n$  un réel non nul. Soit une courbe de Bézier de degré  $n$ , de points massiques de contrôle ...,  $(P_{n-1}; \omega_{n-1})$ ,  $(P_n; \omega_n)$ .

Si  $\overrightarrow{P_{n-1}} = \vec{0}$  (donc  $\omega_{n-1} = 0$ ) ou  $P_n = P_{n-1}$  alors le point  $P_n$  est un point stationnaire.

# 1.4 De Casteljau

## 1.4.1 Cas du degré 2

L'algorithme 1 détaille les étapes de l'algorithme de De Casteljau pour la construction d'un point d'une courbe de Bézier quadratique à points massiques de contrôle.

---

**Entrée :** Trois points massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$ .

1. Choix de  $t$  dans  $]0; 1[$
2. Calcul de  $(Q_0; \alpha_0) = (1 - t) \odot (P_0; \omega_0) \oplus t \odot (P_1; \omega_1)$
3. Calcul de  $(Q_1; \alpha_1) = (1 - t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t \odot (P_2; \omega_2)$
4. Calcul de  $(R_0; \varpi_0) = (1 - t) \odot (Q_0; \alpha_0) \oplus t \odot (Q_1; \alpha_1)$

**Sortie :** Le point massique  $(R_0; \varpi_0)$  de l'arc de courbe modélisé par la courbe de Bézier quadratique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$ .

---

**Algorithme 1 :** Algorithme de De Casteljau dans l'espace des points massiques, cas quadratique.

---

## 1.4.2 Cas du degré 3

L'algorithme 2 détaille les étapes de l'algorithme de De Casteljau pour la construction d'un point d'une courbe de Bézier quartique à points massiques de contrôle.

## 1.4.3 Cas du degré 4

L'algorithme 3 détaille les étapes de l'algorithme de De Casteljau pour la construction d'un point d'une courbe de Bézier quartique à points massiques de contrôle.

---

**Entrée :** Quatre points massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$  et  $(P_3; \omega_3)$ .

1. Choix de  $t$  dans  $]0; 1[$
2. Calcul de  $(Q_0; \alpha_0) = (1 - t) \odot (P_0; \omega_0) \oplus t \odot (P_1; \omega_1)$
3. Calcul de  $(Q_1; \alpha_1) = (1 - t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t \odot (P_2; \omega_2)$
4. Calcul de  $(Q_2; \alpha_2) = (1 - t) \odot (P_2; \omega_2) \oplus t \odot (P_3; \omega_3)$
5. Calcul de  $(R_0; \beta_0) = (1 - t) \odot (Q_0; \alpha_0) \oplus t \odot (Q_1; \alpha_1)$
6. Calcul de  $(R_1; \beta_1) = (1 - t) \odot (Q_1; \alpha_1) \oplus t \odot (Q_2; \alpha_2)$
7. Calcul de  $(S_0; \varpi_0) = (1 - t) \odot (R_0; \beta_0) \oplus t \odot (R_1; \beta_1)$

**Sortie :** Le point massique  $(S_0; \varpi_0)$  de l'arc de courbe modélisé par la courbe de Bézier cubique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$  et  $(P_3; \omega_3)$ .

---

**Algorithme 2 :** Algorithme de De Casteljau dans l'espace des points massiques, cas cubique.

---

---

**Entrée :** Cinq points massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$ ,  $(P_3; \omega_3)$  et  $(P_4; \omega_4)$ .

1. Choix de  $t$  dans  $]0; 1[$
2. Calcul de  $(Q_0; \alpha_0) = (1 - t) \odot (P_0; \omega_0) \oplus t \odot (P_1; \omega_1)$
3. Calcul de  $(Q_1; \alpha_1) = (1 - t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t \odot (P_2; \omega_2)$
4. Calcul de  $(Q_2; \alpha_2) = (1 - t) \odot (P_2; \omega_2) \oplus t \odot (P_3; \omega_3)$
5. Calcul de  $(Q_3; \alpha_3) = (1 - t) \odot (P_3; \omega_3) \oplus t \odot (P_4; \omega_4)$
6. Calcul de  $(R_0; \beta_0) = (1 - t) \odot (Q_0; \alpha_0) \oplus t \odot (Q_1; \alpha_1)$
7. Calcul de  $(R_1; \beta_1) = (1 - t) \odot (Q_1; \alpha_1) \oplus t \odot (Q_2; \alpha_2)$
8. Calcul de  $(R_2; \beta_2) = (1 - t) \odot (Q_2; \alpha_2) \oplus t \odot (Q_3; \alpha_3)$
9. Calcul de  $(S_0; \gamma_0) = (1 - t) \odot (R_0; \beta_0) \oplus t \odot (R_1; \beta_1)$
10. Calcul de  $(S_1; \gamma_1) = (1 - t) \odot (R_1; \beta_1) \oplus t \odot (R_2; \beta_2)$
11. Calcul de  $(T_0; \varpi_0) = (1 - t) \odot (S_0; \gamma_0) \oplus t \odot (S_1; \gamma_1)$

**Sortie :** Le point massique  $(T_0; \varpi_0)$  de l'arc de courbe modélisé par la courbe de Bézier quadratique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$ ,  $(P_3; \omega_3)$  et  $(P_4; \omega_4)$ .

---

**Algorithme 3 :** Algorithme de De Casteljau dans l'espace des points massiques, cas quartique.

---

# 1.5 Augmentation du degré

Il est possible, en utilisant l'algorithme 4, de modéliser une courbe de Bézier rationnelle de degré  $n$  par une courbe de Bézier rationnelle de degré  $n + 1$ .

---

**Entrée** :  $n + 1$  points massiques de contrôle  $(P_i; \omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ .

1.  $(Q_0; W_0) = (n + 1) \odot (P_0; \omega_0)$
2. Soit  $m = n + 1$ .  $(Q_{n+1}; W_{n+1}) = (n + 1) \odot (P_n; \omega_n)$
3. Pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $(Q_k; W_k) = k \odot (P_{k-1}; \omega_{k-1}) \oplus (n + 1 - k) \odot (P_k; \omega_k)$

**Sortie** :  $n + 2$  points massiques de contrôle  $(Q_i; W_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ .

---

**Algorithme 4** : Élévation du degré d'une courbe de Bézier rationnelle de degré  $n$ .

La boucle du Folium de Descartes représentée par une courbe de Bézier rationnelle cubique de points massiques de contrôle  $(P_0; 1)$ ,  $(a_0 \vec{i}; 0)$ ,  $(a_0 \vec{j}; 0)$  et  $(P_0; 1)$  va être modélisée par une courbe de Bézier rationnelle quartique de points massiques de contrôle  $(Q_0; \varpi_0)$ ,  $(Q_1; \varpi_1)$ ,  $(Q_2; \varpi_2)$ ,  $(Q_3; \varpi_3)$  et  $(Q_4; \varpi_4)$  en utilisant l'algorithme 4. Nous avons  $n = 3$  et  $m = 4$  d'où :

1.  $(Q_0; W_0) = 4 \odot (P_0; 1) = (P_0; 4)$
2.  $(Q_4; W_4) = 4 \odot (P_0; 1) = (P_0; 4)$
3. Pour  $k = 1$ .

$$\begin{aligned}
 (Q_1; W_1) &= 1 \odot (P_0; 1) \oplus 3 \odot (a_0 \vec{i}; 0) \\
 &= (P_0; 1) \oplus (3a_0 \vec{i}; 0) \\
 &= (\mathcal{T}_{3a_0 \vec{i}}(P_0); 1) \\
 &\implies Q_1(3a_0; 0) \text{ et } W_1 = 1.
 \end{aligned}$$

4. Pour  $k = 2$ .

$$(Q_2; W_2) = 2 \odot (a_0 \vec{i}; 0) \oplus 2 \odot (a_0 \vec{j}; 0)$$

$$\begin{aligned}
&= (2a_0 \vec{i} + 2a_0 \vec{j}; 0) \\
&\implies \vec{Q}_2 = 2a_0 \vec{i} + 2a_0 \vec{j} \text{ et } W_2 = 0.
\end{aligned}$$

5. Pour  $k = 3$ .

$$\begin{aligned}
(Q_3; W_3) &= 3 \odot (a_0 \vec{j}; 0) \oplus 1 \odot (P_0; 1) \\
&= (P_0; 1) \oplus (3a_0 \vec{j}; 0) \\
&= (\mathcal{T}_{3a_0 \vec{j}}(P_0); 1) \\
&\implies Q_3(0; 3a_0) \text{ et } W_3 = 1.
\end{aligned}$$

Les points massiques de contrôle de la courbe de Bézier quartiques sont  $(P_0; 4)$ ,  $Q_1(3a_0; 0)$  de poids  $W_1 = 1$ ,  $\vec{Q}_2 = 2a_0 \vec{i} + 2a_0 \vec{j}$  de poids  $W_2 = 0$ ,  $Q_3(0; 3a_0)$  de poids  $W_3 = 1$  et  $(P_0; 4)$ . Les points doubles de contrôle des autres courbes sont  $(P_0; 1)$  : en multipliant tous les points massiques par  $\frac{1}{4}$ , nous avons  $(P_0; 1)$ ,  $Q_1(3a_0; 0)$  de poids  $W_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\vec{Q}_2 = \frac{1}{2}a_0 \vec{i} + \frac{1}{2}a_0 \vec{j}$  de poids  $W_2 = 0$ ,  $Q_3(0; 3a_0)$  de poids  $W_3 = \frac{1}{4}$  et  $(P_0; 1)$ , figure 1.

## 2 Changement de paramètres homographiques

### 2.1 Définition et théorème fondamental

Le changement homographique permet d'obtenir, sans augmenter le degré de la courbe, la partie de la courbe de  $\gamma$  sur un intervalle  $[\alpha; \beta]$  en utilisant la courbe de Bézier  $\gamma \circ h$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ . En particulier, nous pouvons construire une courbe de Bézier pour représenter  $\gamma$ , l'intervalle  $[\alpha; +\infty]$  ou  $[-\infty; \beta]$  en restant sur l'intervalle  $[0; 1]$ . La seule restriction est :  $\alpha \neq -\infty$  et  $\beta \neq +\infty$ . Nous pouvons donc obtenir l'infini pour une valeur finie 0 ou 1 via  $\gamma \circ h$  alors qu'en utilisant la courbe initiale  $\gamma$ , et en parodiant Woody Allen : « l'infini c'est loin, surtout vers la fin ». Nous pouvons énoncer :

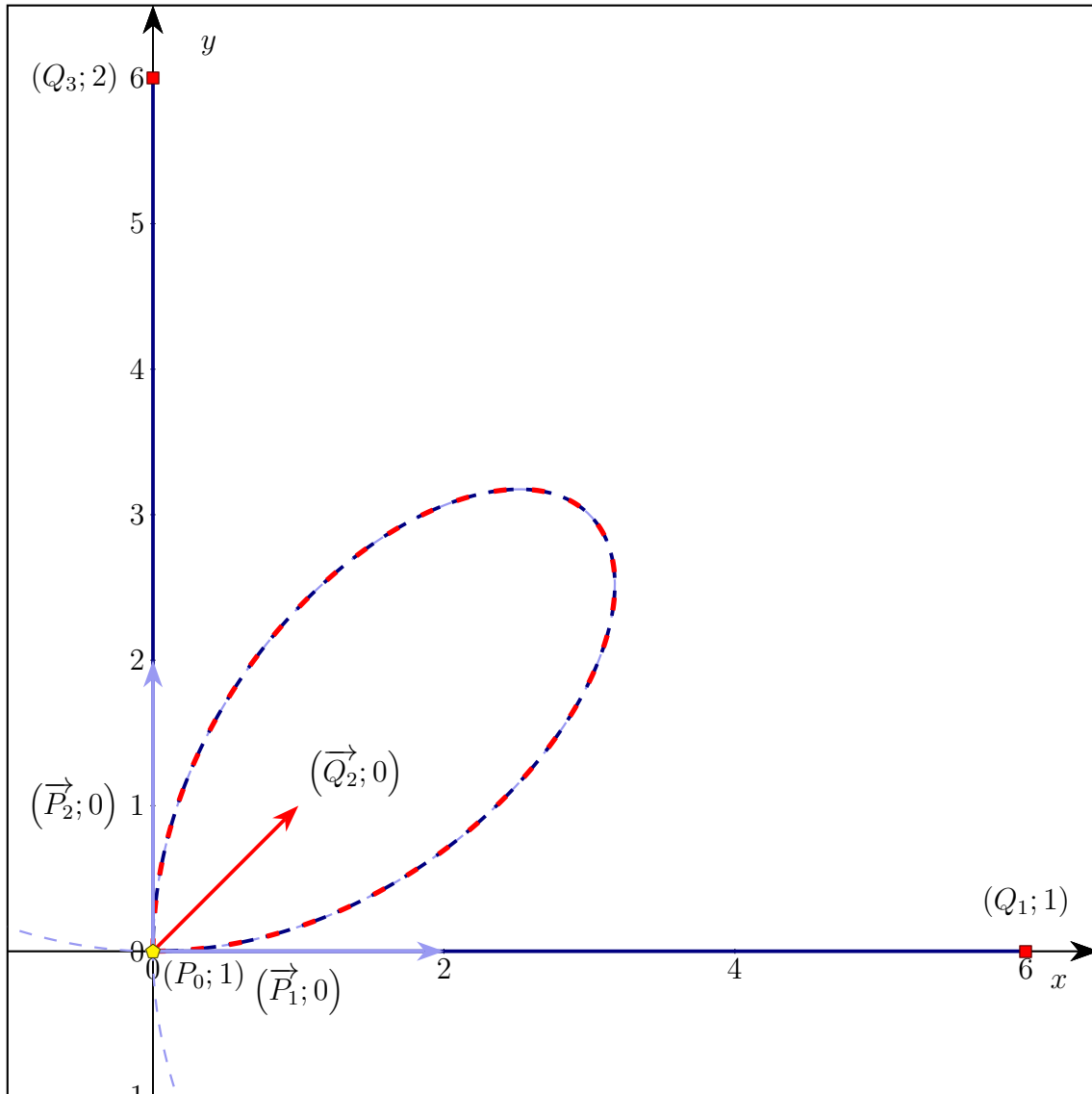


Figure 1 - Boucle d'un Folium de Descartes représenté par une courbe de Bézier rationnelle quartique avec  $a_0 = 2$ .

### ♥ Théorème 3

Changeement de paramètre homographique

Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de degré  $n$  de points massiques de contrôle  $((P_i; \omega_i))_{i \in [0;n]}$

Soit les réels  $a, b, c$  et  $d$  vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (17)$$

Soit  $h$  la fonction homographique de  $\bar{\mathbb{R}}$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  définie par :

$$h(u) = \frac{a(1-u) + bu}{c(1-u) + du} \quad (18)$$

Alors  $\gamma \circ h$  est la courbe de Bézier de degré  $n$  de points massiques de contrôle  $((Q_i; \varpi_i))_{i \in [0;n]}$  dont les expressions dépendent du degré de la courbe.

Démonstration : [2]



Notons que  $h$  est monotone puisque  $h'(u)$  est du signe de :

$$\begin{vmatrix} b-a & a \\ d-c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad \neq 0$$

mais nous ne pouvons pas modifier les vecteurs vitesse de façon indépendante aux extrémités de la courbe. De plus, il n'est pas possible de transformer un point régulier en point stationnaire.

Notons le cas particulier suivant permettant de laisser invariant les points extrémaux lorsque ces derniers sont des points (affines). Dans le cas de vecteurs, il suffit de prendre  $c = 1$  et/ou  $b = 1$  pour ne pas modifier ces vecteurs.



### ☀ Corollaire 3 Changement laissant invariant 0 et 1

Soit  $((P_i; \omega_i))_{i \in [0;n]}$   $n+1$  de points massiques.

Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de degré  $n$  de points de contrôle  $((P_i; \omega_i))_{i \in [0;n]}$ .

Soit  $b$  et  $c$  deux réels strictement positifs. Soit  $h$  définie par :

$$h: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$u \mapsto \frac{b u}{c(1-u) + b u} \quad (19)$$

alors  $\gamma \circ h$  est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $((Q_i; \varpi_i))_{i \in [0;n]}$  avec :

$$\begin{cases} (Q_0; \varpi_0) = c^n \odot (P_0; \omega_0) \underset{\Delta i \omega_0 \neq 0}{=} (P_0; c^n \omega_0) \\ (Q_n; \varpi_n) = b^n \odot (P_n; \omega_n) \underset{\Delta i \omega_n \neq 0}{=} (P_n; b^n \omega_n) \end{cases} \quad (20)$$

Démonstration : [1]. Nous avons  $h(0) = 0$  et  $h(1) = 1$  et  $h$  est croissante.

■

Le tableau 1 donne les valeurs à prendre en fonction de  $h(]0; 1[)$ .

$h(]0; 1[)$	Expression	$a$	$b$	$c$	$d$
$] -\infty; \alpha_1[, h(0) = \alpha_1$	$\alpha_1 - \frac{u}{1-u} = \frac{\alpha_1(1-u) - u}{1-u}$	$\alpha_1$	$-1$	$1$	$0$
$] -\infty; \alpha_1[, h(1) = \alpha_1$	$\alpha_1 + \frac{1-u}{-u} = \frac{(1-u) - \alpha_1 u}{-u}$	$1$	$-\alpha_1$	$0$	$-1$
$] \alpha_i; \alpha_{i+1}[$	$\alpha_i + (\alpha_{i+1} - \alpha_i) u = \alpha_i(1-u) + \alpha_{i+1}u$	$\alpha_i$	$\alpha_{i+1}$	$1$	$1$
$] \alpha_q; +\infty[, h(0) = \alpha_q$	$\alpha_q + \frac{u}{1-u} = \frac{\alpha_q(1-u) + u}{1-u}$	$\alpha_q$	$1$	$1$	$0$

Table 1 - Intervalles et valeurs de  $a, b, c$  et  $d$  dans la formule (18)

$$\begin{aligned}
(Q_0; \varpi_0) &= (c-a)^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2a(c-a) \odot (P_1; \omega_1) \oplus a^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
(Q_1; \varpi_1) &= (c-a)(d-b) \odot (P_0; \omega_0) \oplus (bc - 2ab + ad) \odot (P_1; \omega_1) \oplus ab \odot (P_2; \omega_2) \\
(Q_2; \varpi_2) &= (d-b)^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2b(d-b) \odot (P_1; \omega_1) \oplus b^2 \odot (P_2; \omega_2)
\end{aligned} \tag{22}$$

Table 2 - Points massiques de contrôle du théorème 4

### Remarque 1

Polynôme de Bernstein et changement de paramètre homographe

Dans les polynômes de Bernstein n'interviennent que  $t$  et  $1-t$ . La formule (18) conduit à :

$$1-t = \frac{(c-a)(1-u) + (d-b)u}{c(1-u) + du}$$

Comme tous les polynômes de Bernstein sont homogènes de degré  $n$ , lors d'un changement de paramètres homographe, nous prenons :

$$\begin{cases} t = a(1-u) + bu \\ 1-t = (c-a)(1-u) + (d-b)u \end{cases} \tag{21}$$

## 2.2 Cas du degré 2

### Théorème 4 Changement de paramètre homographe quadratique

Soit une courbe de Bézier  $\gamma$  de points de contrôle massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$  de support la conique  $C$ .

Soit  $h$  définie par la formule (18).

Alors  $\gamma \circ h$  est la courbe de Bézier, de support la conique  $C$ , de points massiques de contrôle  $(Q_0; \varpi_0)$ ,  $(Q_1; \varpi_1)$  et  $(Q_2; \varpi_2)$  donnés dans le tableau 2.

Démonstration : [2]



Nous avons :

$$\gamma(t) = (1-t)^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2t(1-t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t^2 \odot (P_2; \omega_2)$$

En utilisant la formule (21), nous avons :

$$\begin{aligned} & (1-t)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ = & ((c-a)(1-u) + (d-b)u)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ = & (c-a)^2 (1-u)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (c-a)(d-b) 2u(1-u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (d-b)^2 u^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ & 2t(1-t) \odot (P_1; \omega_1) \\ = & 2(a(1-u) + bu)((c-a)(1-u) + (d-b)u) \odot (P_1; \omega_1) \\ = & 2a(c-a) (1-u)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\ \oplus & (b(c-a) + a(d-b)) 2u(1-u) \odot (P_1; \omega_1) \\ \oplus & 2b(d-b) u^2 \odot (P_1; \omega_1) \\ & t^2 \odot (P_2; \omega_2) \\ = & (a(1-u) + bu)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\ = & a^2 (1-u)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\ \oplus & ab 2u(1-u) \odot (P_2; \omega_2) \\ \oplus & b^2 u^2 \odot (P_2; \omega_2) \end{aligned}$$

Il suffit de regrouper les termes en  $(1-u)^2$ ,  $2u(1-u)$  et  $u^2$ .

■

Si  $\omega_0$  et  $\omega_2$  sont deux réels strictement positifs, prenant  $a = 0$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}}$  et  $b = d = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}}$ , nous avons :

$$\omega_1 \neq 0 \implies RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\} = RQBC \left\{ (P_0; 1); \left( P_1; \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_0 \omega_2}} \right); (P_2; 1) \right\} \quad (23)$$

et :

$$\omega_1 = 0 \implies RQBC \{(P_0; \omega_0); (\vec{P}_1; 0); (P_2; \omega_2)\} = RQBC \left\{ (P_0; 1); \left( \frac{1}{\sqrt{\omega_0 \omega_2}} \vec{P}_1; 0 \right); (P_2; 1) \right\} \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
(Q_0; \varpi_0) = (a-c)^3 \odot (P_0; \omega_0) \oplus -3a(c-a)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus -3a^2(c-a) \odot (P_2; \omega_2) \oplus -a^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
(Q_1; \varpi_1) = (a-c)^2(b-d) \odot (P_0; \omega_0) \oplus (c-a)(3ab-bc-2ad) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus a(3ab-2bc-ad) \odot (P_2; \omega_2) \oplus -a^2b \odot (P_3; \omega_3) \\
(Q_2; \varpi_2) = (d-b)^2(a-c) \odot (P_0; \omega_0) \oplus (d-b)(3ab-ad-2bc) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus b(3ab-2ad-bc) \odot (P_2; \omega_2) \oplus -b^2a \odot (P_3; \omega_3) \\
(Q_3; \varpi_3) = (b-d)^3 \odot (P_0; \omega_0) \oplus -3b(d-b)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus 3b^2(b-d) \odot (P_2; \omega_2) \oplus -b^3 \odot (P_3; \omega_3)
\end{array} \right. \quad (25)$$

Table 3 - Points massiques de contrôle du théorème 5

## 2.3 Cas du degré 3

### ♥ Théorème 5 Changement de paramètre homographe cubique

Soit une courbe de Bézier  $\gamma$  de points de contrôle massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$  et  $(P_3; \omega_3)$ , de support la courbe cubique  $c$ .

Soit  $h$  définie par la formule (18).

Alors  $\gamma \circ h$  est la courbe de Bézier, de support la courbe cubique  $c$ , de points massiques de contrôle  $(Q_0; \varpi_0)$ ,  $(Q_1; \varpi_1)$ ,  $(Q_2; \varpi_2)$  et  $(Q_3; \varpi_3)$  donnés dans le tableau 3.

Démonstration : [2]

■

Démonstration : nous avons :

$$\gamma(t) = (1-t)^3 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 3t(1-t)^2 \odot (P_1; \omega_1) \oplus 3t^2(1-t) \odot (P_2; \omega_2) \oplus t^3 \odot (P_3; \omega_3)$$

En utilisant la formule (21), nous avons :

$$\begin{aligned}
& (1-t)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & ((c-a)(1-u) + (d-b)u)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & (c-a)^3 (1-u)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (c-a)^2(d-b) 3u(1-u)^2 \odot (P_0; \omega_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus (c-a)(d-b)^2 3u^2(1-u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (d-b)^3 u^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
& \quad 3t(1-t)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& = 3(a(1-u) + bu) ((c-a)(1-u) + (d-b)u)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& = 3(a(1-u) + bu) \left( (c-a)^2(1-u)^2 + 2(c-a)(d-b)u(1-u) + (d-b)^2u^2 \right) \odot (P_1; \omega_1) \\
& = 3a(c-a)^2 (1-u)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (b(c-a)^2 + 2a(c-a)(d-b)) 3u(1-u)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (2b(d-b) + a(d-b)^2) 3u^2(1-u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3b(d-b)^3 u^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \quad 3t^2(1-t) \odot (P_2; \omega_2) \\
& = 3(a(1-u) + bu)^2 ((c-a)(1-u) + (d-b)u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& = 3(a^2(1-u)^2 + 2abu(1-u) + b^2u^2) ((c-a)(1-u) + (d-b)u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& = 3a^2(c-a) (1-u)^3 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus (2ab(c-a) + a^2(d-b)) 3u(1-u)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus (b^2(c-a) + 2ab(d-b)) 3u^2(1-u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3b^2(d-b) u^3 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \quad t^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& = (a(1-u) + bu)^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& = a^3(1-u)^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus a^2b 3u(1-u)^2 \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus ab^2 3u^2(1-u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus b^3 u^3 \odot (P_3; \omega_3)
\end{aligned}$$

Il suffit de regrouper les termes en  $(1-u)^3$ ,  $3u(1-u)^2$ ,  $3u^2(1-u)$  et  $u^3$ .

■

## 2.4 Cas du degré 4

$$\begin{aligned}
(Q_0; \varpi_0) &= (c-a)^4 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 4a(c-a)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 6a^2(c-a)^2 \odot (P_2; \omega_2) \oplus 4a^3(c-a) \odot (P_3; \omega_3) \oplus a^4 \odot (P_4; \omega_4) \\
(Q_1; \varpi_1) &= (c-a)^3(d-b) \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (3a(c-a)^2(d-b) + b(c-a)^3) \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3(a(c-a)(a(d-b) + b(c-a))) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus (3a^2(c-a)b + a^3(d-b)) \odot (P_3; \omega_3) \oplus a^3b \odot (P_4; \omega_4) \\
(Q_2; \varpi_2) &= (c-a)^2(d-b)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (2b(c-a)^2(d-b) + 2a(c-a)(d-b)^2) \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus ((a(d-b) + b(c-a))^2 + 2a(c-a)b(d-b)) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus (2a(c-a)b^2 + 2a^2b(d-b)) \odot (P_3; \omega_3) \oplus a^2b^2 \odot (P_4; \omega_4) \\
(Q_3; \varpi_3) &= (c-a)(d-b)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (a(d-b)^3 + 3(c-a)b(d-b)^2) \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3b(a(d-b) + b(c-a))(d-b) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus (b^3(c-a) + 3ab^2(d-b)) \odot (P_3; \omega_3) \oplus ab^3 \odot (P_4; \omega_4) \\
(Q_4; \varpi_4) &= (d-b)^4 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 4b(d-b)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 6b^2(d-b)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 4b^3(d-b) \odot (P_3; \omega_3) \oplus b^4 \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned} \tag{26}$$

Table 4 - Points massiques de contrôle du théorème 6.

### ♥ Théorème 6

Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier rationnelle quartique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$ ,  $(P_3; \omega_3)$  et  $(P_4; \omega_4)$ .

Soit l'application homographique  $h$  définie par la formule (18).

Alors  $\gamma \circ h$  est un arc ayant même support que  $\gamma$  représenté par la courbe Bézier rationnelle quartique de points massiques de contrôle  $(Q_0; \varpi_0)$ ,  $(Q_1; \varpi_1)$ ,  $(Q_2; \varpi_2)$ ,  $(Q_3; \varpi_3)$  et  $(Q_4; \varpi_4)$  donnés dans le tableau 4.

Démonstration : .



Démonstration : nous avons :

$$\gamma(t) = (1-t)^4 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 4t(1-t)^3 \odot (P_1; \omega_1) \oplus 6t^2(1-t)^2 \odot (P_2; \omega_2) \oplus 4(1-t)t^3 \odot (P_3; \omega_3) \oplus t^4 \odot (P_4; \omega_4)$$

En utilisant la formule (21), nous avons :

$$\begin{aligned}
& (1-t)^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & ((c-a)(1-u) + (d-b)u)^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & (c-a)^4 (1-u)^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (c-a)^3 (d-b) 4u (1-u)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (c-a)^2 (d-b)^2 6u^2 (1-u)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (c-a)(d-b)^3 4u^3 (1-u) \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (d-b)^4 u^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & (c-a)^4 B_{04}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (c-a)^3 (d-b) B_{14}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (c-a)^2 (d-b)^2 B_{24}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (c-a)(d-b)^3 B_{34}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (d-b)^4 B_{44}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& 4t(1-t)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
= & 4(a(1-u) + bu)((c-a)(1-u) + (d-b)u)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
= & 4(a(1-u) + bu) \left( (c-a)^3 (1-u)^3 + 3(c-a)^2 (d-b)u(1-u)^2 \right) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & 4(a(1-u) + bu) \left( 3(c-a)(d-b)^2 u^2 (1-u) + (d-b)^3 u^3 \right) \odot (P_1; \omega_1) \\
= & \left( 4a(c-a)^3 (1-u)^4 + 3a(c-a)^2 (d-b) 4u(1-u)^3 \right) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & \left( b(c-a)^3 4u(1-u)^3 + 2b(c-a)^2 (d-b) 6u^2(1-u)^2 \right) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & \left( 2a(c-a)(d-b)^2 6u^2(1-u)^2 + a(d-b)^3 4u^3(1-u) \right) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & \left( 3(c-a)b(d-b)^2 4u^3(1-u) + 4b(d-b)^3 u^4 \right) \odot (P_1; \omega_1) \\
= & 4a(c-a)^3 B_{04}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & \left( 3a(c-a)^2 (d-b) + b(c-a)^3 \right) B_{14}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & \left( 2b(c-a)^2 (d-b) + 2a(c-a)(d-b)^2 \right) B_{24}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & \left( a(d-b)^3 + 3(c-a)b(d-b)^2 \right) B_{34}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
\oplus & 4b(d-b)^3 B_{44}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& 6t^2(1-t)^2 \odot (P_2; \omega_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6(a(1-u) + bu)^2 ((c-a)(1-u) + (d-b)u)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
&= 6\left(a(c-a)(1-u)^2 + (a(d-b) + b(c-a))u(1-u) + b(d-b)u^2\right)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
&= \left(6a^2(c-a)^2(1-u)^4 + (a(d-b) + b(c-a))^2 6u^2(1-u)^2 + 6b^2(d-b)^2 u^4\right) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 3(a(c-a)(a(d-b) + b(c-a))) 4u(1-u)^3 \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 2\left(a(c-a)b(d-b) 6(1-u)^2 u^2\right) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 3(a(d-b) + b(c-a))b(d-b) 4u^3(1-u) \odot (P_2; \omega_2) \\
&= 6a^2(c-a)^2 B_{04}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 3(a(c-a)(a(d-b) + b(c-a))) B_{14}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus \left((a(d-b) + b(c-a))^2 + 2a(c-a)b(d-b)\right) B_{24}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 3(a(d-b) + b(c-a))b(d-b) B_{34}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 6b^2(d-b)^2 B_{44}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
&4t^3(1-t) \odot (P_3; \omega_3) \\
&= 4(a(1-u) + bu)^3 ((c-a)(1-u) + (d-b)u) \odot (P_3; \omega_3) \\
&= 4\left(a^3(1-u)^3 + 3a^2bu(1-u)^2 + 3ab^2u^2(1-u) + b^3u^3\right) ((c-a)(1-u) + (d-b)u) \odot (P_3; \omega_3) \\
&= \left(4a^3(c-a)(1-u)^4 + 3a^2(c-a)b 4u(1-u)^3\right) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus \left(2a(c-a)b^2 6u^2(1-u)^2 + b^3(c-a) 4u^3(1-u)\right) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus \left(a^3(d-b) 4u(1-u)^3 + 2a^2b(d-b) 6u^2(1-u)^2 + 3ab^2(d-b) 4u^3(1-u) + 4b^3(d-b)u^4\right) \odot (P_3; \omega_3) \\
&= 4a^3(c-a) B_{04}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus (3a^2(c-a)b + a^3(d-b)) B_{14}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus (2a(c-a)b^2 + 2a^2b(d-b)) B_{24}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus (b^3(c-a) + 3ab^2(d-b)) B_{34}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus 4b^3(d-b) B_{44}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
&t^4 \odot (P_4; \omega_4) \\
&= (a(1-u) + bu)^4 \odot (P_4; \omega_4) \\
&= a^4(1-u)^4 \odot (P_4; \omega_4) \\
&\oplus a^3b 4u(1-u)^3 \odot (P_4; \omega_4) \\
&\oplus a^2b^2 6u^2(1-u)^2 \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned}$$



$$\oplus ab^3 4u^3 (1-u) \odot (P_4; \omega_4)$$

$$\oplus b^4 u^4 \odot (P_4; \omega_4)$$

Il suffit de regrouper les termes en  $(1-u)^4$ ,  $4u(1-u)^3$ ,  $6u^2(1-u)^2$ ,  $4u^4(1-u)$  et  $u^4$ .

■

### ☀ Corollaire 4 : Changement laissant invariant 0 et 1

Soit  $\gamma$  une courbe de Bézier de degré  $n$  de points massiques de contrôle  $((P_i; \omega_i))_{i \in [0;n]}$  avec  $\omega_0 > 0$  et  $\omega_4 > 0$ .

Soit  $b = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_4}}$  et  $c = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_0}}$  et  $h$  définie par :

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \frac{bu}{c(1-u) + bu} \quad (27)$$

alors  $\gamma \circ h$  est la courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $((Q_i; \varpi_i))_{i \in [0;n]}$  avec :

$$(Q_0; \varpi_0) = \left( \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_0}} \right)^4 \odot (P_0; \omega_0) = \frac{1}{\omega_0} \odot (P_0; \omega_0) = (P_0; 1) \quad (28)$$

$$(Q_1; \varpi_1) = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_4}} \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_0^3}} \odot (P_1; \omega_1) \underset{\omega_1 \neq 0}{=} \left( P_1; \frac{\omega_1}{\sqrt[4]{\omega_0^3 \omega_4}} \right) \quad (29)$$

$$(Q_2; \varpi_2) = \sqrt{\frac{1}{\omega_0 \omega_4}} \odot (P_2; \omega_2) \underset{\omega_2 \neq 0}{=} \left( P_2; \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_0 \omega_4}} \right) \quad (30)$$

$$(Q_3; \varpi_3) = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_0}} \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_4^3}} \odot (P_3; \omega_3) \underset{\omega_3 \neq 0}{=} \left( P_3; \frac{\omega_3}{\sqrt[4]{\omega_0 \omega_4^3}} \right) \quad (31)$$

$$(Q_4; \varpi_4) = \left( \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_4}} \right)^4 \odot (P_4; \omega_4) = \frac{1}{\omega_4} \odot (P_4; \omega_4) = (P_4; 1) \quad (32)$$

Démonstration : [1]

Il suffit d'utiliser le théorème 6 avec  $a = 0$ ,  $b = d = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_4}}$  et  $c = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_0}}$ . Nous avons

$$c - a = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega_4}} \text{ et } b - d = 0.$$

■

# 3 Cinématique et changement de paramètre quadratique

## 3.1 Définitions et théorème fondamental

Nous avons vu qu'un changement de paramètre homographique permettait de changer la vitesse de parcours d'une courbe, mais il est impossible de modifier de façon indépendante les vecteurs vitesse aux deux extrémités et il n'est pas possible de transformer un point régulier en un point stationnaire. Pour réaliser ce travail, nous introduisons le changement de paramètre quadratique :

$$h_2(u) = \frac{a(1-u)^2 + 2bu(1-u) + cu^2}{d(1-u)^2 + 2eu(1-u) + fu^2} \quad (33)$$

et la courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(P_i; \omega_i)_{i \in [0;n]}$  est transformée en la courbe de Bézier de points massiques de contrôle  $(Q_i; \varpi_i)_{i \in [0;2n]}$ , mais ces deux courbes sont sur la même courbe support. Si nous voulons créer des points stationnaires à un autre endroit de la courbe support qu'aux extrémités de la courbe de Bézier, il est plus judicieux de commencer par faire un changement de paramètre homographique.

## 3.2 Cas du degré 2

### ♥ Théorème 7 Changement de paramètre quadratique pour le degré 2

Soit une courbe de Bézier quadratique  $\gamma$  de points de contrôle massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$ , de support la conique  $C$ .

Soit  $h_2$  définie par la formule (33), alors  $\gamma \circ h_2$  est la courbe de Bézier quartique de points de contrôle massiques  $(Q_0; \varpi_0)$ ,  $(Q_1; \varpi_1)$ ,  $(Q_2; \varpi_2)$ ,  $(Q_3; \varpi_3)$  et  $(Q_4; \varpi_4)$  de support la conique  $C$  sont donnés dans le tableau 5.

$$\left\{ \begin{array}{l}
(Q_0; \varpi_0) = (d-a)^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2a(d-a) \odot (P_1; \omega_1) \oplus a^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
(Q_1; \varpi_1) = (b-e)(a-d) \odot (P_0; \omega_0) \oplus (ae+bd-2ab) \odot (P_1; \omega_1) \\
\quad \oplus ab \odot (P_2; \omega_2) \\
(Q_2; \varpi_2) = \frac{ac-af+2e^2-4eb+2b^2-cd+fd}{3} \odot (P_0; \omega_0) \\
\quad \oplus \frac{4eb-4b^2-2ac+af+cd}{3} \odot (P_1; \omega_1) \\
\quad \oplus \frac{ac+2b^2}{3} \odot (P_2; \omega_2) \\
(Q_3; \varpi_3) = (f-c)(e-b) \odot (P_0; \omega_0) \oplus (-2bc+bf+ce) \odot (P_1; \omega_1) \\
\quad \oplus cb \odot (P_2; \omega_2) \\
(Q_4; \varpi_4) = (c-f)^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2c(f-c) \odot (P_1; \omega_1) \oplus c^2 \odot (P_2; \omega_2)
\end{array} \right. \quad (34)$$

Table 5 - Changement de paramètre quadratique pour le degré 2

Démonstration : nous avons :

$$1 - h(u) = \frac{(d-a)(1-u)^2 + 2(e-b)u(1-u) + (f-c)u^2}{d(1-u)^2 + 2eu(1-u) + fu^2} \quad (35)$$

et :

$$\gamma(t) = (1-t)^2 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 2t(1-t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus t^2 \odot (P_2; \omega_2)$$

En adaptant la remarque 1, nous avons :

$$\begin{aligned}
& (1-t)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & \left( (d-a)(1-u)^2 + 2(e-b)u(1-u) + (f-c)u^2 \right)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & (d-a)^2 (1-u)^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & 2(e-b)(d-a) 2u(1-u)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & \left( 4(e-b)^2 + 2(d-a)(f-c) \right) u^2(1-u)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & 4(e-b)(f-c) u^3(1-u) \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (f-c)^4 u^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
= & (d-a)^2 (1-u)^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
\oplus & (e-b)(d-a) 4u(1-u)^3 \odot (P_0; \omega_0)
\end{aligned}$$

$$\oplus \frac{2(e-b)^2 + (d-a)(f-c)}{3} 6u^2(1-u)^2 \odot (P_0; \omega_0)$$

$$\oplus (e-b)(f-c) 4u^3(1-u) \odot (P_0; \omega_0)$$

$$\oplus (f-c)^4 u^4 \odot (P_0; \omega_0)$$

$$2t(1-t) \odot (P_1; \omega_1)$$

$$= 2(a(1-u)^2 + 2bu(1-u) + cu^2) \left( (d-a)(1-u)^2 + 2(e-b)u(1-u) + (f-c)u^2 \right) \odot (P_1; \omega_1)$$

$$= 2a(d-a) (1-u)^4 \odot (P_1; \omega_1)$$

$$\oplus (a(e-b) + b(d-a)) 4u(1-u)^3 \odot (P_1; \omega_1)$$

$$\oplus \frac{a(f-c) + c(d-a)}{3} 6u^2(1-u)^2 \odot (P_1; \omega_1)$$

$$\oplus (b(f-c) + c(e-b)) 4u^3(1-u) \odot (P_1; \omega_1)$$

$$\oplus c(f-c) u^4 \odot (P_1; \omega_1)$$

$$t^2 \odot (P_2; \omega_2)$$

$$= (a(1-u)^2 + 2bu(1-u) + cu^2)^2 \odot (P_2; \omega_2)$$

$$= a^2 (1-u)^4 \odot (P_2; \omega_2)$$

$$\oplus ab 4u(1-u)^3 \odot (P_2; \omega_2)$$

$$\oplus \frac{2b^2 + ac}{3} 6u^2(1-u)^2 \odot (P_2; \omega_2)$$

$$\oplus bc 4u^3(1-u) \odot (P_2; \omega_2)$$

$$\oplus c^2 u^4 \odot (P_2; \omega_2)$$

Il suffit de regrouper les termes en  $(1-u)^4$ ,  $4u(1-u)^3$ ,  $6u^2(1-u)^2$ ,  $4u^3(1-u)$  et  $u^4$ .

■

### 3.3 Cas du degré 3

## ♥ Théorème 8 Changement de paramètre quadratique pour le degré 3

Soit une courbe de Bézier quadratique  $\gamma$  de points de contrôle massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$  et  $(P_3; \omega_3)$ , de support la cubique  $c$ .

Soit  $h_2$  définie par la formule (33), alors  $\gamma \circ h_2$  est la courbe de Bézier de degré 6 de points de contrôle massiques  $(Q_0; \varpi_0)$ ,  $(Q_1; \varpi_1)$ ,  $(Q_2; \varpi_2)$ ,  $(Q_3; \varpi_3)$ ,  $(Q_4; \varpi_4)$ ,  $(Q_5; \varpi_5)$  et  $(Q_6; \varpi_6)$  de support la courbe  $c$  sont donnés dans les tableaux 6 et 7.

$$\begin{aligned} (Q_0; \varpi_0) &= (d-a)^3 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 3a(d-a)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\ &\oplus 3a^2(d-a) \odot (P_2; \omega_2) \oplus a^3 \odot (P_3; \omega_3) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} (Q_1; \varpi_1) &= (a-d)^2(e-b) \odot (P_0; \omega_0) \\ &\oplus (a-d)(3ba-bd-2ae) \odot (P_1; \omega_1) \\ &\oplus a(2bd+ae-3ba) \odot (P_2; \omega_2) \\ &\oplus a^2b \odot (P_3; \omega_3) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} (Q_2; \varpi_2) &= (d-a) \frac{4(e-b)^2 + (d-a)(f-c)}{5} \odot (P_0; \omega_0) \\ &\oplus \frac{(a-d)(3ca-cd-2af) + 4*(b-e)(3ab-ae-2bd)}{5} \odot (P_1; \omega_1) \\ &\oplus \frac{a(2cd+af-3ca) + 4b(2ae+bd-3ab)}{5} \odot (P_2; \omega_2) \\ &\oplus \frac{1}{5} a(ac+4b^2) \odot (P_3; \omega_3) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} (Q_3; \varpi_3) &= (e-b) \frac{2(e-b)^2 + 3(c-f)(a-d)}{5} \odot (P_0; \omega_0) \\ &\oplus \frac{3}{5} ((f-c)(ae+bd-2ab) + (b-e)(ac-cd+2b(b-e))) \odot (P_1; \omega_1) \\ &\oplus \frac{3}{5} (2b^2(e-b) + abf + ace + bcd - 3abc) \odot (P_2; \omega_2) \\ &\oplus \frac{b}{5} (2b^2 + 3ac) \odot (P_3; \omega_3) \end{aligned} \quad (39)$$

Table 6 - Changement de paramètre quadratique pour le degré 3, première partie.

$$\begin{aligned}
(Q_4; \varpi_4) &= (f-c) \frac{4(b-e)^2 + (f-c)(d-a)}{5} \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus \frac{4(b-e)(3cb-ce-2bf) + (c-f)(3ac-af-2cd)}{5} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus \frac{4b(2ce+bf-3cb) + c(2af+cd-3ac)}{5} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus \frac{c}{5} (4b^2+ca) \odot (P_3; \omega_3)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
(Q_5; \varpi_5) &= (f-c)^2 (e-b) \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (c-f)(3bc-bf-2ce) \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus c(2bf+ce-3bc) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus c^2 b \odot (P_3; \omega_3)
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
(Q_6; \varpi_6) &= (f-c)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus 3c(f-c)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3c^2(f-c) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus c^3 \odot (P_3; \omega_3)
\end{aligned} \tag{42}$$

Table 7 - Changement de paramètre quadratique pour le degré 3, seconde partie.

Démonstration : nous avons

$$\begin{aligned}
(B_{02}(u))^3 &= B_{06}(u) & B_{02}(t) B_{22}(t)^2 &= \frac{1}{15} B_{46}(u) \\
(B_{12}(u))^3 &= \frac{2}{5} B_{36}(u) & B_{02}(t) B_{12}(t)^2 &= \frac{4}{15} B_{26}(u) \\
(B_{22}(u))^3 &= B_{66}(u) & B_{12}(t)^2 B_{22}(t) &= \frac{1}{15} B_{46}(u) \\
B_{02}(t)^2 B_{12}(t) &= \frac{1}{3} B_{16}(u) & B_{12}(t) B_{22}(t)^2 &= \frac{1}{3} B_{56}(u) \\
B_{02}(t)^2 B_{22}(t) &= \frac{1}{15} B_{26}(u) & B_{02}(t) B_{12}(t) B_{22}(t) &= \frac{1}{10} B_{36}(u)
\end{aligned}$$

ainsi que la relation de la formule (35) :

$$1 - h(u) = \frac{(d-a)(1-u)^2 + 2(e-b)u(1-u) + (f-c)u^2}{d(1-u)^2 + 2eu(1-u) + fu^2}$$

et :

$$\gamma(t) = (1-t)^3 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 3t(1-t) \odot (P_1; \omega_1) \oplus 3(1-t)t^2 \odot (P_2; \omega_2) \oplus t^3 \odot (P_3; \omega_3)$$

Rappelons :

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2$$

En adaptant la remarque 1, nous avons :

$$\begin{aligned} & (1-t)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\ = & \left( (d-a)B_{02}(u)^2 + (e-b)B_{12}(u) + (f-c)B_{22}(u) \right)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\ = & (d-a)^3 B_{02}(u)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (e-b)^3 B_{12}(u)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (f-c)^3 B_{22}(u)^3 \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 3(a-d)^2 (e-b) B_{02}(u)^2 B_{12}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 3(a-d)^2 (f-c) B_{02}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 3(b-e)^2 (f-c) B_{12}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 3(f-c)^2 (d-a) B_{02}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 3(f-c)^2 (e-b) B_{12}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 6(e-b)(c-f)(a-d) B_{02}(u) B_{12}(u) B_{22}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 3(e-b)^2 (d-a) B_{02}(u) B_{12}(u)^2 \odot (P_0; \omega_0) \\ = & (d-a)^3 B_{06}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (e-b)^3 \frac{2}{5} B_{36}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (f-c)^3 B_{66}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (a-d)^2 (e-b) B_{16}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (d-a)^2 (f-c) \frac{1}{5} B_{26}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (e-b)^2 (d-a) \frac{4}{5} B_{26}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (b-e)^2 (f-c) \frac{1}{5} B_{46}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 4(f-c)^2 (d-a) \frac{1}{5} B_{46}(u) \odot (P_0; \omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus (f-c)^2 (e-b) B_{56}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (e-b)(c-f)(a-d) \frac{3}{5} B_{36}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& = (d-a)^3 B_{06}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (a-d)^2 (e-b) B_{16}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (d-a) \frac{4(e-b)^2 + (d-a)(f-c)}{5} B_{26}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (e-b) \frac{2(e-b)^2 + 3(c-f)(a-d)}{5} B_{36}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (f-c) \frac{(b-e)^2 + 4(f-c)(d-a)}{5} B_{46}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (f-c)^2 (e-b) B_{56}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \oplus (f-c)^3 B_{66}(u) \odot (P_0; \omega_0) \\
& \\
& 3t(1-t)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& = 3(aB_{02}(u) + bB_{12}(u) + cB_{22}(u))((d-a)B_{02}(u) + (e-b)B_{12}(u) + (f-c)B_{22}(u))^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& = 3a(d-a)^2 B_{02}(u)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3b(e-b)^2 B_{12}(u)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3c(f-c)^2 B_{22}(u)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3(a-d)(3ba - bd - 2ae) B_{02}(u)^2 B_{12}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3(a-d)(3ca - cd - 2af) B_{02}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3(b-e)(3cb - ce - 2bf) B_{12}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3(c-f)(3ac - af - 2cd) B_{02}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3(c-f)(3bc - bf - 2ce) B_{12}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 6(3abc - 2abf - 2ace + afe - 2bcd + bfd + ced) B_{02}(u) B_{12}(u) B_{22}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus -3(e-b)(3ab - ae - 2bd) B_{02}(u) B_{12}(u)^2 \odot (P_1; \omega_1) \\
& = 3a(d-a)^2 B_{06}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus b(e-b)^2 \frac{6}{5} B_{36}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3c(f-c)^2 B_{66}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (a-d)(3ba - bd - 2ae) B_{16}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (a-d)(3ca - cd - 2af) \frac{1}{5} B_{26}(u) \odot (P_1; \omega_1)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \oplus (b-e)(3cb-ce-2bf) \frac{4}{5} B_{46}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (c-f)(3ac-af-2cd) \frac{1}{5} B_{46}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (c-f)(3bc-bf-2ce) B_{56}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (3abc-2abf-2ace+afe-2bcd+bfd+ced) \frac{3}{5} B_{36}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (b-e)(3ab-ae-2bd) \frac{4}{5} B_{26}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& = 3a(d-a)^2 B_{06}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (a-d)(3ba-bd-2ae) B_{16}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus \frac{(a-d)(3ca-cd-2af)+4(b-e)(3ab-ae-2bd)}{5} B_{26}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus \frac{3}{5} ((f-c)(ae+bd-2ab)+(b-e)(ac-cd+2b(b-e))) B_{36}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus \frac{4(b-e)(3cb-ce-2bf)+(c-f)(3ac-af-2cd)}{5} B_{46}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus (c-f)(3bc-bf-2ce) B_{56}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& \oplus 3c(f-c)^2 B_{66}(u) \odot (P_1; \omega_1) \\
& 3t^2(1-t) \odot (P_2; \omega_2) \\
& = 3(aB_{02}(u)+bB_{12}(u)+cB_{22}(u))^2 ((d-a)B_{02}(u)+(e-b)B_{12}(u)+(f-c)B_{22}(u)) \odot (P_2; \omega_2) \\
& = 3a^2(d-a)B_{02}(u)^3 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3b^2(e-b)B_{12}(u)^3 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3c^2(f-c)B_{22}(u)^3 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3a(2bd+ae-3ba)B_{02}(u)^2 B_{12}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3a(2cd+af-3ca)B_{02}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3b(2ce+bf-3cb)B_{12}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3c(2af+cd-3ac)B_{02}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3c(2bf+ce-3bc)B_{12}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 6(abf+ace+bcd-3abc)B_{02}(u) B_{12}(u) B_{22}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3b(2ae+bd-3ab)B_{02}(u) B_{12}(u)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
& = 3a^2(d-a)B_{06}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus b^2(e-b) \frac{6}{5} B_{36}(u) \odot (P_2; \omega_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus 3c^2 (f - c) B_{66}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus a(2bd + ae - 3ba) B_{16}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus a(2cd + af - 3ca) \frac{1}{5} B_{26}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus b(2ce + bf - 3cb) \frac{4}{5} B_{46}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus c(2af + cd - 3ac) \frac{1}{5} B_{46}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus c(2bf + ce - 3bc) B_{56}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus (abf + ace + bcd - 3abc) \frac{3}{5} B_{36}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus b(2ae + bd - 3ab) \frac{4}{5} B_{26}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& = 3a^2 (d - a) B_{06}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus a(2bd + ae - 3ba) B_{16}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus \frac{a(2cd + af - 3ca) + 4b(2ae + bd - 3ab)}{5} B_{26}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus \frac{3}{5} (2b^2 (e - b) + abf + ace + bcd - 3abc) B_{36}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus \frac{4b(2ce + bf - 3cb) + c(2af + cd - 3ac)}{5} B_{46}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus c(2bf + ce - 3bc) B_{56}(u) \odot (P_2; \omega_2) \\
& \oplus 3c^2 (f - c) B_{66}(u) \odot (P_2; \omega_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& = (a(1 - u)^2 + 2bu(1 - u) + cu^2)^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& = a^3 B_{02}(u)^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus b^3 B_{12}(u)^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus c^3 B_{22}(u)^3 \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus 3a^2 b B_{02}(u)^2 B_{12}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus 3a^2 c B_{02}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus 3b^2 c B_{12}(u)^2 B_{22}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus 3c^2 a B_{02}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus 3c^2 b B_{12}(u) B_{22}(u)^2 \odot (P_3; \omega_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus 6 c b a B_{02}(u) B_{12}(u) B_{22}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus 3 b^2 a B_{02}(u) B_{12}(u)^2 \odot (P_3; \omega_3) \\
& = a^3 B_{06}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus b^3 \frac{2}{5} B_{36}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus c^3 B_{66}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus a^2 b B_{16}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus a^2 c \frac{1}{5} B_{26}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus 4 b^2 c \frac{1}{5} B_{46}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus c^2 a \frac{1}{5} B_{46}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus c^2 b B_{56}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus c b a \frac{3}{5} B_{36}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus b^2 a \frac{4}{5} B_{26}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& = a^3 B_{06}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus a^2 b B_{16}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus \frac{1}{5} a (a c + 4 b^2) B_{26}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus \frac{2}{5} b (b^2 + a c) B_{36}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus \frac{c}{5} (4 b^2 + c a) B_{46}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus c^2 b B_{56}(u) \odot (P_3; \omega_3) \\
& \oplus c^3 B_{66}(u) \odot (P_3; \omega_3)
\end{aligned}$$

■

## 3.4 Cas du degré 4

♥ Théorème 9 : Changement de paramètre quadratique pour le degré 4

Soit une courbe de Bézier quadratique  $\gamma$  de points de contrôle massiques  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$ ,  $(P_2; \omega_2)$ ,  $(P_3; \omega_3)$  et  $(P_4; \omega_4)$ , de support la quartique  $c$ .

Soit  $h_2$  définie par la formule (33), alors  $\gamma \circ h_2$  est la courbe de Bézier de degré 8 de points de contrôle massiques  $(Q_0; \varpi_0)$ ,  $(Q_1; \varpi_1)$ ,  $(Q_2; \varpi_2)$ ,  $(Q_3; \varpi_3)$ ,  $(Q_4; \varpi_4)$ ,  $(Q_5; \varpi_5)$ ,  $(Q_6; \varpi_6)$ ,  $(Q_7; \varpi_7)$  et  $(Q_8; \varpi_8)$  de support la courbe  $c$  avec :

$$\begin{aligned} (Q_0; \varpi_0) = & (d-a)^4 \odot (P_0; \omega_0) \oplus 4a(d-a)^3 \odot (P_1; \omega_1) \\ & \oplus 6a^2(d-a)^2 \odot (P_2; \omega_2) \oplus 4a^3(d-a) \odot (P_3; \omega_3) \oplus a^4 \odot (P_4; \omega_4) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} (Q_1; \varpi_1) = & (d-a)^3(e-b) \odot (P_0; \omega_0) \\ & \oplus (d-a)^2(b(d-a) + 3a(e-b)) \odot (P_1; \omega_1) \\ & \oplus 3a(d-a)(b(d-a) + a(e-b)) \odot (P_2; \omega_2) \\ & \oplus a^2(3b(d-a) + a(e-b)) \odot (P_3; \omega_3) \\ & \oplus a^3b \odot (P_4; \omega_4) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} (Q_2; \varpi_2) = & (d-a)^2 \frac{(f-c)(d-a) + 6(e-b)^2}{7} \odot (P_0; \omega_0) \\ & \oplus (d-a) \frac{(d-a)(12b(e-b) - 3a(c-f) - c(a-d)) + 12a(e-b)^2}{7} \odot (P_1; \omega_1) \\ & \oplus \frac{3((d-a)(ca(d-2a) + fa^2) + 12ab(ab - ae - bd))}{7} \odot (P_2; \omega_2) \\ & \oplus \frac{3(2ae(ae + 2bd) + 2bd(2ae + bd))}{7} \odot (P_2; \omega_2) \\ & \oplus \frac{a(12b(db + ae - 2ab) - a(3c(a-d) + a(c-f)))}{7} \odot (P_3; \omega_3) \\ & \oplus \frac{a^2(ca + 6b^2)}{7} \odot (P_4; \omega_4) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
(Q_3; \varpi_3) &= (e-b)(d-a) \frac{3(f-c)(d-a) + 4(e-b)^2}{7} \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus 3 \frac{(d-a)^2(e-b)c + (d-a)^2(f-c)b + 4(d-a)(e-b)^2b}{7} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 2 \frac{3(d-a)(e-b)(f-c)a + 2(e-b)^3a}{7} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3 \frac{(d-a)^2bc + 2(d-a)(e-b)ac + 4(d-a)(e-b)b^2}{7} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 3 \frac{2(d-a)(f-c)ab + 6(e-b)^2ab + (e-b)(f-c)a^2}{7} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus \frac{6(d-a)abc + 4(d-a)b^3 + 3(e-b)a^2c}{7} \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus 3 \frac{4(e-b)ab^2 + (f-c)a^2b}{7} \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus ab \frac{3ca + 4b^2}{7} \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
(Q_4; \varpi_4) &= \frac{3(d-a)^2(f-c)^2 + 24(d-a)(f-c)(e-b)^2 + 8(e-b)^4}{35} \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus 2 \frac{3c(f-c)(d-a)^2 + 12c(d-a)(e-b)^2 + 3(f-c)^2(d-a)a}{35} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 2 \frac{24(f-c)(d-a)(e-b)b + 12(f-c)a(e-b)^2 + 16(e-b)^3b}{35} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3 \frac{(d-a)^2c^2}{35} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 12 \frac{(d-a)c(f-c)a + 4(d-a)cb(e-b) + 2(d-a)(f-c)b^2}{35} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 24 \frac{ca(e-b)^2 + (f-c)^2a^2 + 2(f-c)ab(e-b) + 2b^2(e-b)^2}{35} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 6 \frac{(d-a)c^2a + 4(d-a)cb^2 + ca^2(f-c)}{35} \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus 8 \frac{6cab(e-b) + 3ab^2(f-c) + 4b^3(e-b)}{35} \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus \frac{3c^2a^2 + 24cab^2 + 8b^4}{35} \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
(Q_5; \varpi_5) &= \frac{(f-c)(e-b)(3(d-a)(f-c)+4(e-b)^2)}{7} \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus 2 \frac{3(d-a)(e-b)(f-c)c+3(d-a)(f-c)^2b+2(e-b)^3c}{7} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3 \frac{4(e-b)^2(f-c)b+(e-b)(f-c)^2a}{7} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3 \frac{(d-a)c((e-b)c+2(f-c)b)+2(e-b)c(f-c)a}{7} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 3 \frac{4(e-b)^2cb+4(e-b)(f-c)b^2+(f-c)^2ba}{7} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus \frac{3(d-a)c^2b+3c(e-b)(ca+4b^2)+6cba(f-c)+4b^3(f-c)}{7} \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus \frac{cb(3ac+4b^2)}{7} \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
(Q_6; \varpi_6) &= \frac{(f-c)^2((d-a)(f-c)+6(e-b)^2)}{7} \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus 3(f-c) \frac{(f-c)^2a+(f-c)((d-a)c+4(e-b)b)+4c(e-b)^2}{7} \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3 \frac{(f-c)^2(ca+2b^2)+(f-c)c((d-a)c+8b(e-b))+2c^2(e-b)^2}{7} \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus \frac{c((d-a)c^2+(f-c)(3ca+12b^2)+12cb(e-b))}{7} \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus \frac{c^2(ac+6b^2)}{7} \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
(Q_7; \varpi_7) &= (f-c)^3(e-b) \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (f-c)^2(3(e-b)c+(f-c)b) \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 3(f-c)c((e-b)c+(f-c)b) \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus c^2((e-b)c+3(f-c)b) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus c^3b \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
(Q_8; \varpi_8) &= (f - c)^4 \odot (P_0; \omega_0) \\
&\oplus 4 (f - c)^3 c \odot (P_1; \omega_1) \\
&\oplus 6 c^2 (f - c)^2 \odot (P_2; \omega_2) \\
&\oplus 4 c^3 (f - c) \odot (P_3; \omega_3) \\
&\oplus c^4 \odot (P_4; \omega_4)
\end{aligned} \tag{51}$$

Démonstration : laissée au lecteurs.



## Références

- [1] J. P. Bécar. *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [2] Jean-Paul Bécar, Laurent Fuchs, and Lionel Garnier. Courbe d'une fraction rationnelle et courbes de bézier à points massiques. In *GTMG 2019*, Toulouse, France, 2019.